E.J.レモン

論理学初歩

竹尾治一郎
浅野楢英 訳

世界思想社

E. J. レモン

論理学初歩

竹尾治一郎
浅野楢英 訳

世界思想社

BEGINNING LOGIC
by E. J. Lemmon

THOMAS NELSON AND SONS LTD.

Japanese translation rights arranged through
Orion Press, Tokyo

序

この書物の内容は，1958年から1962年の間にオックスフォード大学において，1961年の春学期にテキサス大学において――主としてそこでわたしはこの書物を書く余暇をえたのであるが――行なわれた講義からできあがったものである．またそれは，その後カリフォルニア州クレアモントにおける半学年のコースに，そしてロサンゼルスのカリフォルニア大学の夏期大学講座にも用いられたことがある．この書物はまず第1に，大学レベルの1学期あるいは半学年の初等論理学講座に関連して用いられることを意図して書かれている．しかしそれが大学以下の諸学校では用いることができないという理由はないと思われる．そして論理学が次第にこれらのレベルの学校でも教えられるようになることを，わたしは希望もし期待もする者である．哲学や数学の予備知識は（ものを数えたり，初等的な代数の方程式をそれと知る能力を別とすれば）予想されていない．そしてこの書物は，数学的思考法が容易であるひとびとよりはむしろ，これが難かしいと思うひとびとを対象として書かれている．従って，自分の力で仕事をしている知的な人ならば，素人であっても，たいていのところはわかりやすいと思うことであろう．

学生に

この書物の目的は，学生に命題計算と述語計算――近代記号論理学はこれらを基礎として築かれている――の有効な知識を与えることである．従って，証明を発見するに当っての実際的技術に力点がおかれている．このわくぐみのなかで，わたしは直観的なわかりよさのために形式的な正確さを犠牲にすることはできるだけ少なくした．もっとも時には，そしてはじめの段階では，

これはきわめて慎重に行なわれている．その結果は恐らく無味乾燥な読みものになったであろうが，しかし読み進むのに骨が折れることはないであろう．他方わたしは，より理論的な節をも含めた．それはひとつにはより高級な論理学のスタイルを示すためであり，またひとつには，論理学の研究をさらに進めて行きたくなるでもあろう出来のよい学生を誘い寄せるものとしてである（巻末に付した文献表と注は，この点に関してかれの手引きとなることをもくろんだ）．特に第２章の第４，第５節と，第４章第２節は，本書の他の部分よりも遙かに難かしい．普通の読者はとばす（つまり早く読み通す）のが賢明であろう．そのあとに出てくることがらで，そこの内容に本質的に依拠するものはない．

あらましを言うと，第１章では命題計算における初等的証明の幾つかを学び，その導出の規則に馴れ親しむ．第２章ではこの計算の語彙と文法を習得したあとで，真理表が学生に紹介される．これはつぎに，上の規則の健全性と完全性に対する独立のテスト基準として用いられる．第３章では述語計算の規則を与え，そして，第１章における命題計算の取り扱い方と同様に，比較的非形式的な方法によって，基本的結果が示される．第４章では述語計算の理論の素描（第１，第２節）からはじめ，引き続きその応用へと進む．すなわち，第１に同一性に関して，第２に伝統的な三段論法の理論に関して，第３に関係の特性に関して考察する．多くの論理学のコースのシラバスには入っているが，論理学のテキストにおいては十分な注意を与えられないことになりがちの標準形は，付録Ａ（これは第２章第３節のあとに読むことができる）にまわされた．付録Ｂにはクラスの理論が紹介してあって，本書とより高級なテキストとの橋渡しをすることになるであろう．

教師に

自然演繹法の技術が本書を通じて用いられ，命題計算，述語計算のいずれについても，公理的展開にふれているところはない．もっとも，文献表には

参考文献が与えてはある．証明の提示の仕方は Suppes [24][1)] に負うところが最も多いのであるが，この点に関しては，Mates[14] もかれに従っている．証明の各行の左側に，仮定を数字で挙げる方法は，伝統的な方法にくらべて遙かに明瞭であるとわたしには思われる．命題計算の規則は，本質的にはゲンツェン(G. Gentzen) に由来するものである．それらの規則は，ほとんどすべての標準的な結果がそれらから15行を越えない証明によってえられ，しかもまた，哲学的な疑問をいだく学生にとってもむりなくのみこめるという大きい長所をもっている．そういうわけで，それらの規則は，十分に訓練を積んだ世代にとって助けとなるのであるが，しかしまた，明瞭に定められた一組の規則から外へ学生を出て行かさないようにもするのである．二重否定の規則の半分（「－－AからAを導くこと」）が除去されると，その結果えられる規則の組は，ヨハンソン (I. Johannson) の最小計算を定義するものになることに，またこの組に「矛盾から任意の命題を導くこと」という規則を加えると，その結果えられる規則の組は，直観主義の命題論理学を定義するものになることに，専門家は気づくであろう．排中律の疑わしさが示されるならば，出来のよい学生はこのような事実に興味をもちはじめるものである．

述語計算の規則もまたゲンツェンに由来するものであって，Fitch[4] にもこれを見出すことができる．それらはメイツの近著 (Mates [14]) にもふたたび現われている．それらの規則は，いましがた言及したより弱い規則の組に加えられるならば，もとの命題計算に対応する，それぞれの目的にかなった述語計算を生み出すことになるという特性をもっている．われわれの取り扱いの特徴として言っておいてよいと思われることは，通常は自由変数のはたす役割が，本書においては，任意の名前とよばれる異なった種類の記号によってはたされるということである．その結果，形成規則は通常よりも複雑になる．しかし「空虚な量記号」(vacuous quantifiers) といった奇妙なものは姿を消し，そして量記号に関する規則をそれほど制限の多くないかたちで述べることが可能であるということが示される．この特徴は目新しいものでは

ない．それは少なくともヒルベルト (D. Hilbert) とベルナイス (P. Bernays) までさかのぼり，ヒンティッカ (J. Hintikka) によって用いられ，その一変形は Mates [14] に見えている．わたしの経験では，この方がより親しまれている記法よりも，学生を困惑させる度合いが遙かに少ないものであった.[2)]

能力のある学生は誰しも，質料的含意のパラドックスに不審の念をいだくであろう．この事実から考えるならば，命題計算の取り扱いを真理表の方法から始めることははなはだまずい．従ってわたしは，そのパラドックスが自然に導かれる帰結として第2章に出てくることになるような規則の組を，第1章において学生に受けいれて貰うことにしようとしたのである．この場合には，真理表による方法は，部分的には，これらの規則に訴えて根拠づけられることになる．それ故，そのパラドックスが本当の問題を提示すると考えている教師は，わたしの戦術が公正を欠くと（正当に）思うであろう．

本書の内部におけるレファランス

命題計算における結果は，第1，第2章に現われる順序に従って，1—55の番号を付してある．述語計算における結果は，第3，第4章に現われる順序に従って100—165の番号を付してある．クラスの理論における幾つかの結果は，200—231の番号が付してある（付録B）．そうした結果が，のちに用いられたり，引用されたりする場合には，その番号によって言及する．時として，練習問題における結果が言及されることもある．たとえば‘2.4.1(*c*)’は，第2章第4節の練習問題1(*c*)をさすのである．括弧に入れた数字は証明の行をさすか，同じ節において以前にその番号をつけられた文または式をさす．どちらであるかは，つねに文脈がこれを決めるであろう．

*

第1章を読んで下さった Ivo Thomas 神父と，書物の全体を読んで下さった James Thomson 教授に対して，有益な助言と多くの誤まりの訂正をしていただいたことを感謝する．わたしの妻と Susan Liddiard 嬢にはタイ

プ打ちを，Bruce Marshall 氏には校正ならびに索引の作成をして貰ったことを感謝する．論理的規則をどのように定式化するのが最もよいかについて，同僚諸氏とかわした討論に多くのものをわたしは負うている．とりわけ Patrick Suppes 教授と Michael Dummett に——わたしがこの書物を書いてはどうかというのは，かれが（1957年に）言い出したことなのである．しかしわたしが最も多くを負うているのは，オックスフォード，テキサス，その他の大学の多数の学生であって，かれらは質問をしたり苦情を言ったりして，本書に含まれていることがらについて，もっと明瞭に書くようにと，わたしに迫ったのであった．まだ残っている多くの解説上の誤まりは，言うまでもなくわたしのものである．

わたしはこの書物を Arthur Prior に捧げたい．かれの励ましと熱意がなかったならば，わたしは論理学の研究をはじめることはなかったであろう．またこの書物をたのしく読んでくれたでもあろう父の思い出にも，これを捧げたい。

E. J. L.

カリフォルニア州クレアモント

1965年3月

1） この個所ならびに本文中の角括弧を用いた引照は，文献表に記載の書物に対するものである．

2） Church[2]の脚注460はこの方法に批判的であることを付記すべきであろう．しかしかれの言分は，この方法の教育上の魅力への反対をなんら含んではいない．

訳注） 翻訳においては，本文のなかに括弧が重複する個所などに，適宜角括弧を用いてある．

目　　次

論理学初歩

第1章　命題計算 1

第1節　論理学の本性

論理学とは何であるかを簡単に説明することは容易ではなく，また恐らく有益でもないであろう．大抵の学科と同様，論理学は多種多様の問題を包括し，正確な境界がない．一方の端ではそれは次第に数学となり，他方の端では哲学となる．論理学とは何であるかを知る最善の方法は，実際に幾らかやってみることである．にもかかわらず，この学科について二三のごく一般的な意見を述べることは，この書物の後の部分において展開される議論のための手掛りを与えることになるであろう．

論理学が主として関心をもつのは，論証の健全性（soundness）および不健全性であって，論理学は論証——どのような研究領域のであれ——が受けいれられるための条件を，出来るだけ正確に示そうとするのである．しかしこの言い方は幾らか説明を必要とする．われわれは，第1に論証とは何か，第2に健全性とはどういう意味か，第3に健全性の条件はどうすれば正確に示せるか，第4にこれらの条件は，論証が取り出されて来たその論証の領域から，どのようにして独立でありうるかを述べる必要がある．これらの問題点を順に取り上げよう．

典型的には，論証とは，前提（premiss）とよばれる幾つかの言明（statement）あるいは命題（proposition）と，それらから帰結すると主張され，結論（conclusion）とよばれるある他の言明あるいは命題とからなる．日本語*では，結論が前提から帰結するという主張を，「従って」や「故に」のような語を，

* 訳注）原文ではもちろん「英語」である。

前提と結論のあいだにいれることによって示すのである．結論が前提から帰結するとかしないとか言うかわりに，論理学者は，前提が結論を必然的に伴なう（entail）とか，必然的に伴なわないとか言うこともある．人が論証をまじめに用いる（たとえば，論証というものの例として挙げるだけではなく）場合，その人は前提が真であると主張し，同時にその前提を根拠として結論が真であると主張しているのである．われわれが結論が前提から導かれるということによって言わんとするのは，このことにほかならない．

論理学者は，結論が与えられた前提から帰結するかどうかに関心をもつ．結論が帰結するならば，問題の論証は健全であると言われ，そうでないならば不健全であると言われる．「妥当」(valid) および「不妥当」(invalid) という語が「健全」および「不健全」のかわりに用いられることもしばしばある．論証の健全性，不健全性の問題は，その論証のなかの前提にせよ，結論にせよ，命題の真偽の問題とは注意ぶかく区別されねばならない．たとえば，真なる結論が偽なる前提から，あるいは真なる前提と偽なる前提とがまじったものから，健全に導出されることがありうる．たとえば，

(1) ナポレオンはドイツ人であった．すべてのドイツ人はヨーロッパ人である．故にナポレオンはヨーロッパ人であった．

という論証では，真なる結論が，第1の前提は偽であり第2の前提では真であるような前提から，健全に導かれていることがわかる．また偽なる結論が偽なる前提から，あるいは真なる前提と偽なる前提とがまじったものから，健全に導かれることがありうる．たとえば，

(2) ナポレオンはドイツ人であった．すべてのドイツ人はアジア人である．故にナポレオンはアジア人であった．

という論証においては，偽なる結論が2つの偽なる前提から健全に導かれている．他方，たんに前提と結論が真であるからといって，論証は必ずしも健全ではない．たとえば，

(3)　ナポレオンはフランス人であった．すべてのフランス人はヨーロッパ人である．故にヒトラーはオーストリア人であった．

という論証においては，すべての命題が真ではあるが，その結論が前提から帰結すると言うひとはいないであろう．

論証の健全性，不健全性と，論証を構成する命題の真偽とのあいだの基本的な関連はつぎの通りである．論証は，その前提がすべて真であり，そして結論が偽であるならば，健全ではありえない．推論が健全であるための必要条件は，真理からは真理のみが帰結するということである．この条件はもちろん論証が健全であるためには十分ではない．そのことは，真なる前提と真なる結論をもつにもかかわらず健全な論証ではない (3) からもわかる通りである．しかし，論証が健全であるためには，少なくとも，すべての前提が真であるならば結論もまた真でなければならないのである．ところで，論理学者が元来関心をもつのは前提および結論が現実に真であるか偽であるかということよりも，むしろ論証が健全であるための条件である．しかし真偽と健全性のあいだには上述のような関連があるので，論理学者は第二次的には真偽に関心をもつであろう．

論理学者は，健全な論証の条件を正確に示すために，どのような技術を用いるのであろうか．この本の大部分は，ある意味では，この問いに対する詳細な解答である．しかしさしあたり言えることは，論理学者の考案になる最も有益なものは，特殊な記号法，すなわち論理的記法，を採用することであって，それを用いるためには正確な規則を与えることができるのである．このような特徴があることから，この学問は記号論理学 (symbolic logic) とよばれることがある．（それはまた数理論理学とよばれることもある．それはひとつには，既に数学がもっている厳密さに似た厳密さがそこにおいては達成されるからであり，またひとつには，現代の論理学者が，数学の領域から取り出された論証に，特に関心をもってきたからである．）論理学において記

号法がいかに重要かを理解するには，特殊な数学的記号のもっている同様の重要さを想起すべきであろう．

つぎの初等代数学の方程式を考えてみよう．

(4)　$x^2-y^2=(x+y)(x-y)$

この命題を，変数‘x’，‘y’，括弧，プラスおよびマイナスの記号を用いることなしに，日常の日本語で表現しようとすれば，それがいかに難かしいかを想像していただきたい．恐らくわれわれにできることはせいぜいつぎの如くであろう．

(5)　ある数の平方から第2の数の平方を引き去った結果は，これらの2つの数を加え合わせ，第1の数から第2の数を引き去り，さらにこれら2つの計算の結果をかけ合わせてえられるのと同じ数になる．

(4) を (5) と比較すると，同じ命題の表現として，(4) には (5) にまさる少なくとも3つの利点がある．まず (4) の方が簡単である．またより明瞭である——少なくとも数学的記号の意味が理解されたときにはそうである．そして (4) の方が正確である．簡単，明瞭，正確という，同じ利点が，特殊な論理的記号を用いることによって論理学にもえられるのである．方程式 (4) は，数 x，y の任意の組に対して真である．故に x を15，y を7とおくと，(4) の帰結としてつぎの式がえられる．

(6)　$15^2-7^2=(15+7)(15-7)$

(6) を (4) と比較すると，(6) はただ‘x’のかわりに‘15’，‘y’のかわりに‘7’とおくだけで (4) からえられることがわかる．このようにして，変数に対する正しい代入が行なわれたことを一目見て確認するだけで，実際に (6) が (4) から帰結することをチェックできるのである．しかし (4) が (5) においてなされたように，(6) が日常の日本語によって表現されていたとするならば，それが (5) から健全に結論されたかどうかを知ることは，遙かに困難であったであろう．数学的記号は，数学的計算の実行をもチェックをも，遙かに容

易にする．同様に，正しく論証し，論証の健全性を能率的にチェックしようとするならば，われわれ人間にとっては論理的記号はなくてはならないものなのである．

以下において，論理学の仕事をするための特殊な記法を学ばねばならないということがいらだたしく思われるならば，読者は，‘＋’，‘－’などの正しい用法を学ぶときに，計算ができるようになるために習得するのと同様のことを，論証ができるようになるために習得しつつあるだけだということを想起していただきたい．論理学が数学を模範と仰いだこの考案は，論証の健全性，不健全性をチェックするための，論理学者の最も強力な道具なのである．

この節でのわれわれの最後の問題は，いかにして妥当な論証の条件が，論証の取り出される領域から独立に研究されうるかということである．このことができないとするならば，論理学という独立の学問が存在することはないであろう．さしあたりは簡単な例を挙げるだけで十分であろう．つぎの，いずれも健全な，2つの論証（ひとつは鳥類学から，他は化学から取り出された論証である）を比較してみよう．

(7)　トゥイーティは駒鳥である．いかなる駒鳥も渡り鳥ではない．故にトゥイーティは渡り鳥ではない．

(8)　酸素は元素である．いかなる元素も分子ではない．故に酸素は分子ではない．

これらの論証には，共通な何ものかがあるという感じをまぬがれがたいであろう．この何ものかが論証の論理形式と論理学者のよぶものであって，われわれはのちに，もっと多くのことをそれについて語らねばならないであろう．さしあたり，この共通の形式を予備的に分析してみよう．(7)と(8)の第1の前提はいずれも，ある特定の事物――それをmとよぼう（(7)においてはトゥイーティ，(8)においては酸素）――が，ある性質――それをFとよぼう（(7)においては駒鳥であること，(8)においては元素であること）――をもつことを主張している．第2の前提は，この性質Fをもついかなるものも，ある

他の性質——それをGとよぼう（(7) では渡り鳥であること，(8) では分子であること）——をもたないことを主張している．そして，(7)と(8)の結論は，それ故に，対象mが性質Gをもたないことを主張している．(7) と (8) の共通のパターンはつぎのように述べられるであろう．

(9)　mはFをもつ．いかなるFをもつものもGをもたない．
故にmはGをもたない．

(9) にみられるように，共通の論理形式が取り出されると，その新しい特徴が明らかになる．どのような対象mが選ばれ，FおよびGがどのような性質として選ばれようとも，(9) のパターンは妥当であるだろう．(9) は実際に妥当な論証のパターンなのである．たとえば，mをジェンキンズ，FとGをそれぞれ，独身であるという性質，結婚しているという性質と考えるならば，(9) はつぎのようになる．

(10)　ジェンキンズは独身である．いかなる独身者も結婚していない．故にジェンキンズは結婚していない．

これは，(7)，(8) と同様に，健全な論証である．しかしながら，(9) は，鳥類学にせよ化学にせよ法律にせよ，いかなる特定の題材とも結びついてはいない．特殊な用語——「渡り鳥」，「分子」，「独身者」——は，型を表わす文字‘F’，‘G’，‘m’にかわられている．

このように形式は題材とは独立に研究されうる．そして論証の妥当，不妥当は，すでに明らかになったように，その題材よりはむしろ，主としてその形式によるのである．それ故，論理学が研究するものは，現実の論証そのものであるよりはむしろ，論証の形式なのである．

この節の内容を要約すれば，論理学は論証のパターンが，妥当あるいは不妥当となる正確な条件の記号による研究である，と定義できるであろう．その場合，妥当性，不妥当性は，それに関連する真，偽の概念と注意ぶかく区別されねばならないということが含まれている．しかしこの説明は，これから述べることに照らしてよりよく理解されるであろうという意味において，

暫定的なものなのである．

第2節　条件法と否定

論証の論理形式を分析するとき（前の節で (7), (8) から (9) をえたときにしたように），特定の題材に関係のある語は消え去り，他の語が残る．この残った語彙が論理学者の主として関心をもつものなのである．というのは，妥当性はそれらの語の特性によって決まるのだからである．この語彙のなかで特に重要なのは，「……ならば……」（‘if……then……’），「……そして……」（‘……and……’），「……あるいは……」（‘either……or……’），および「でない」（‘not’）という語である．実際，この章と次の章は，論証においてこれらの語を適切に駆使するための正確な規則を体系的に研究することに捧げられる．日常言語にはこれらの語を一括してよぶ文法用語はないが，論理学においてはこれらの語は，文に作用して文を形成する演算記号（sentence-forming operators on sentences）とよばれてよいであろう．これらの語が，このものものしい称号に値する理由を説明することにしよう．

すでに見たことであるが，論証のなかに現われるものは命題である．論証は命題のある複合であり，そのなかに前提と結論を区別することができる．命題は，自然言語では，文において表現される．しかしながら，すべての文が命題を表すわけではない．ある文は問いに用いられ（「ジャックはどこにいるか」のように），また他の文は命令に用いられる（「ドアを開けなさい」のように）．命題を表現する文と他の種類の文を区別することが望ましい場合には，論理学者は前者を平叙文とよぶことがある．わたしが文について語るときはいつも，はっきり断わらない限り，わたしの念頭にあるのは平叙文である．いま2つの日本語の文，たとえば「雨が降っている」と「雪が降っている」を選ぶならば，「……ならば……」，「……そして……」，「……あるいは……」を適当に配置して新しい日本語の文，「雨が降っているならば雪が降っている」，「雨が降っているそして雪が降っている」，「雨が降っている

かあるいは雪が降っている」がえられる．もとの2つの文は，「……ならば……」，「……そして……」，および「……あるいは……」の2つの空所に代入されたに過ぎない．さらに1つの日本語の文，たとえば「雨が降っている」を選んで，「でない」を適当に配置すると，新しい日本語の文「雨は降っていない」がえられる．このようにして，文法的に言えば，これらの語は与えられた(1つまたは2つの)文から新しい文を形成する作用をするのである．故にわたしは，これらの語を，文に作用して文を形成する演算記号とよぶのである．他の例としてはつぎのようなものが挙げられる．「……ではあるが，しかし……」('although……nevertheless……')〔これを完全な文にするには2つの文がいる〕，「……であるから……」('because……, ……')〔これにも2つの文がいる〕，「……ということである」('it is said that……')〔これを完全な文にするには1つの文があればよい〕．

(この書物は日本語で書かれているので，日本語の文と語に言及している．しかし上の説明は，適当な翻訳をすれば，わたしの知っているすべての言語にあてはまるであろう．論理学には国による違いは，一見その反対のように思われるのではあるが，存在しないのである．)

この節では，「……ならば……」と「でない」を用いるための規則を取り扱うので，これらの演算記号を表わす特殊な論理記号を導入することから始める．PとQが任意の2つの命題であるならば，PならばQ，という命題をつぎのように書く．

$$P \to Q.$$

また，Pが任意の命題ならば，Pということはない，という命題をつぎのように書く．

$$-P.$$

命題 $P \to Q$ は，前件 (antecedent) として命題Pを，後件 (consequent) として命題Qをもつ条件的命題，あるいは簡単に条件法 (conditional) とよばれるであろう．たとえば，雨が降っているならば雪が降っている，という命題の

前件は，雨が降っているという命題であり，その後件は雪が降っているという命題である．命題 $-P$ は P の否定とよばれる．たとえば，雪が降っていないという命題は，雪が降っているという命題の否定である．

ここに用いられた文字，‘P’，‘Q’ は，代数の変数，‘x’，‘y’ に比較されるべきものである．すなわちそれは一種の変数とみなされ，論理学者はしばしばこれを命題変数（propositional variable）とよぶ．マイナス記号を導入する場合，x，y を任意の2つの数とすれば，x から y を引き去った結果は $x-y$ と書かれる，と言うであろう．同じように ‘→’ を，上には数学の変数のかわりに命題変数を用いることによって，導入したのである．論理学においては，数ではなく命題が取り扱われるのだからである．

命題変数はまた，複合命題の論理形式を表現する助けとなるであろう（第1節の (9) における型を表わす文字 ‘F’，‘G’ の用法と比較せよ）．たとえば，つぎのような複合命題を考えてみよう．

(1)　雨が降っているならば，雪が降っていないならば雨が降っていないということはない．

雨が降っているという命題に ‘P’ を，雪が降っているという命題に ‘Q’ を用いるとしよう．すると ‘→’ と ‘$-$’ の助けをかりて，(1) をつぎのように記号化することができる．

(2)　$P \rightarrow -(-Q \rightarrow -P)$

（括弧はここでは自明な方法で導入される）．(2) は，(1) の一種の速記法であると同時に，また簡単，明瞭という利点をもち——少なくとも，新奇な記号法にともなう異和感が取れたときには——(1) の論理形式をうまく表現することができる．われわれは (2) がまた，まったく異なるつぎの命題の論理形式となっていることが理解できる．

(3)　火があるならば，煙がないならば火がないということはない．

ここでは，P は火があるという命題の代用となるものであり，Q は煙がある

という命題の代用となるものである.

論証をするとき，われわれは与えられた前提から結論を導く，あるいは演繹する (deduce)，あるいは導出する (derive). 論理学では，導出規則とよばれる規則を定式化するが，それらの規則の目的は，えられる結論が正しくえられることを保証するために，演繹の操作を規制することである. 通常の論証のいまひとつの特徴は，段階を追って進むことである. すなわち，ひとつの段階の結論は新しい段階のために前提として用いられ，これを繰り返して最終の結論にいたる. それ故，いまここで仮定 (assumption) と前提 (premiss) を区別しておけば好都合であろう. 仮定とは，与えられた長さの論証のなかにおいて，1回も推論を行なうことなくえられる結論であるが，しかしより適切には，論証全体のはじめに当然のこととして認められるような命題のことである，と理解されるであろう. 前提とは，全体の論証のなかのある特定の段階において，何かの結論をうるために用いられるような命題のことである，と理解されるであろう. 仮定は論証のある与えられた段階で，ある結論をうるために前提として用いられるであろう. そしてこのように用いられるのが仮定の特徴であろう. そこでこの結論自身が，論証におけるつぎの段階の前提として用いられるであろう. 以下同様. こうして，ある段階における前提は，論証全体の仮定であるか，またはその論証におけるより以前の段階の結論であろう. 論証全体のなかの，与えられたどの段階においても，究極的にはある仮定または幾つかの仮定の組合せから導かれた結論があることになる. そしてこの結論は，その仮定（またはそれらの仮定）に基づく，あるいは依存する，と言われるであろう.

大ざっぱに言うと，論証を書きあらわす際のわれわれの手続は，つぎの通りであろう. それぞれの段階は新しい行によって示され，それぞれの行には通し番号がうたれる. それぞれの行には，その論証全体の仮定か，あるいはより前の行の命題から導かれた，前提であるこれらの命題に基づいている結論が現われるであろう. それぞれの命題の右側には，その命題がその段階に

おいて現われた根拠を示すために，用いられた導出規則の名称と，(必要ならば) 用いられた前提の番号が示されるであろう．それぞれの命題の左側には，その段階で論証が依存している，もとの仮定の番号が示されるであろう．

仮定の規則 (A)

第1に導入されるべき導出規則は仮定の規則 (Rule of assumptions) であり，これをAと名づける．この規則は，論証の任意の段階において，論証の仮定として選ばれた任意の命題を導入することを許す．われわれはたんにその命題をひとつの新しい行として記入し，その右側に‘A’と書き，その左側にはその命題自身の番号を記して，それが仮定としてそれ自身に依存することを示す．たとえば，われわれはつぎのようにして論証をはじめるであろう．

1　(1)　$P \to Q$　A

これは，第1の段階が，命題 $P \to Q$ を仮定の規則によって仮定することであったことを意味している．あるいは，9行の論証のあとで

10　(10)　$-Q$　A

に進むかも知れない．これは第10行目で，命題 $-Q$ を仮定の規則によって仮定することを意味している．

仮定の規則は，われわれがどのような種類の仮定をするかに，何の制限をも課さない（とりわけ，導入される仮定が真であることを確かめておくことが問題とはならない）ということは，危険なまでに自由であるように見えるかも知れない．この事情は，導入される仮定の真偽よりもむしろ，論証の健全性に論理学者は関心をもつのだということを想起するならば，最もよく理解される．故にAは，何であれわれわれの望む仮定を導入することを許すのである――論理学者の仕事は，仮定に基づくすべての結論が，正しく仮定に基づいていることを確かめることなのであって，仮定の資格証明書を調べあげることではないのである．

肯定肯定式（MPP）

第2の導出規則は，演算記号 → に関わるものである．それを肯定肯定式（*modus ponendo ponens*）とよび，MPP と略記する．これは，これと密接な関係のある推論の原理を表わす中世の用語であった。前提として条件的命題とその条件的命題の前件とが与えられるならば，MPP はその条件的命題の後件を結論として導くことを許す．たとえば，$P \rightarrow Q$ と P とが与えられると，われわれは Q を演繹することができる．あるいは，より複雑な例を挙げるならば，$-Q \rightarrow (-P \rightarrow Q)$ と $-Q$ とが与えられると，われわれは $-P \rightarrow Q$ を演繹することができる．より形式的に書けば，これら2つの論証はつぎのようになる．

1	1	(1) $P \rightarrow Q$	A
	2	(2) P	A
	1, 2	(3) Q	1, 2 MPP
2	1	(1) $-Q \rightarrow (-P \rightarrow Q)$	A
	2	(2) $-Q$	A
	1, 2	(3) $-P \rightarrow Q$	1, 2 MPP

これらの論証のそれぞれの最初の2行において，必要な仮定を規則Aによって導入し，左側にそれに応じて番号をつける．(3) の行で，規則 MPP によって正しい結論が導かれる．すなわち，(1) の行の条件法の後件が，(2) の行にその条件法の前件が与えられることによって導かれるのである．どちらの論証の場合にも，(3) の行の右に，用いられた規則（MPP）を，この規則の適用に際して用いられた前提の番号とともに書き入れる．(3) の行の左には，結論が依存している仮定を示しておく——この場合にはふたたび (1) と (2) であるが，これらはここでは，MPP が適用される前提であると同時に，論証全体の仮定でもある．

つぎに挙げるのはより複雑な例であるが，2つの規則Aと MPP のみを用

いている．まず第1に，$P\to Q$，$Q\to R$ および P という仮定が与えられると，Rを正しく結論しうることを示そう．

3	1	(1)	$P\to Q$	A
	2	(2)	$Q\to R$	A
	3	(3)	P	A
	1, 3	(4)	Q	1, 3 MPP
	1, 2, 3	(5)	R	2, 4 MPP

この論証の最初の3行は，必要な仮定を導入しているに過ぎない．(1)の行で条件法$P\to Q$が与えられ，(3)の行でその前件Pが与えられると，MPP によって(4)の行で結論Qが導かれる．それ故，(1)と(3)が，この規則の適用される前提として右側に挙げられ，またその段階で用いられた仮定として左側に挙げられる．(5)の行では，Qすなわち(4)の行における結論を，MPP の新たな適用のための前提として用い，そしてQが(2)の行において仮定された条件法$Q\to R$の前件であることに注意する．そこで前提としての(2)および(4)から，求める結論Rがえられるのである．従って番号 2，4 が右側に現われる．どのような仮定を左側に挙げるべきかをきめるにあたって，(4)は(1)と(3)に基づくが，(2)はそれ自身にのみ基づくことに注意する．これらの仮定を「プール」して，(1)，(2)および(3)がえられる．

第2に，$P\to(Q\to R)$，$P\to Q$，およびPから，Rを正しく結論しうることを示そう．

4	1	(1)	$P\to(Q\to R)$	A
	2	(2)	$P\to Q$	A
	3	(3)	P	A
	1, 3	(4)	$Q\to R$	1, 3 MPP
	2, 3	(5)	Q	2, 3 MPP
	1, 2, 3	(6)	R	4, 5 MPP

(4)の行と(5)の行では，MPP が適用される前提はまた仮定でもある．従って

同じ番号の対が右側と左側に現われる．しかし(6)の行では，前提は条件法(4)，$Q \to R$ およびその前件(5)，Q であり，これらはいずれも論証全体の仮定ではない．それ故，左側の番号をきめるにあたっては，(4)と(5)が基づいている仮定――それぞれ，(1)，(3)，および(2)，(3)である――を「プール」して(1)，(2)，および(3)がえられるのである．

MPP が信頼できる推論の原理であることは明らかでなければならない．少なくともそれによって，われわれが真なる前提から偽なる結論へと導かれることはありえない．というのは，われわれの「……ならば……」の基本的特性は，ある条件法が真であり，その前件もまた真であるならば，その後件がまた真でなければならないということであるが，まさに MPP によって，条件法そのものとその前件が前提として与えられているならば，その条件法の後件を結論として主張することが許されるのだからである．

「……という仮定が与えられるならば，……と正しく結論することができる」という煩瑣な表現の略記法があれば好都合であろう．このためにわたしは，論理学の文献のなかではしばしば，しかし誤解を招きやすい仕方で，断定記号（assertion-sign）とよばれている記号，

$$\vdash$$

を導入する．これは「故に」(therefore) と読むのが便利であろう．この記号の前には，仮定を（任意の順序に）ならべて書き，後には，導かれる結論を書く．この記法を用いて，上述の 4 つの推論（今後は証明〔proof〕とよぶ）をつぎのような便利なかたちに要約できるであろう．

1　$P \to Q,\ P \vdash Q$;

2　$-Q \to (-P \to Q),\ -Q \vdash -P \to Q$;

3　$P \to Q,\ Q \to R,\ P \vdash R$;

4　$P \to (Q \to R),\ P \to Q,\ P \vdash R$.

この形式でえられる結果を，われわれは連式（sequent）とよぶであろう．このように連式とは，一組の仮定とそれらの仮定から導かれると主張される結

論とを含む論証のわくぐみなのである．われわれが証明することのできる連式は，つぎのような意味において，論証の妥当なパターンを実行可能な仕方で表わしている．すなわち，証明された連式のなかの P, Q, R,……を現実の命題ととり，そして‘⊢’を「故に」と読むならば，妥当な論証がえられるのである．‘⊢’の左側の命題は論証の仮定となり，右側の命題はそれらの仮定から正しく導かれた結論となる．このような観点に立てば，証明を構成することにおいて，われわれは論証のパターンの妥当性を証明していることになるが，それが論理学者の主として関心をもつことのひとつなのである．

証明された連式は，証明の最終行から直ちに書くことができる[1)]．左側の番号のかわりに，その番号に対応する行に現われる命題を書き，つぎに断定記号を記入し，最後に最終行の命題そのものを結論として加えるのである．このことを理解するために，上述の4つの連式を，それらに対応する証明の最終行と比較していただきたい．

否定否定式（MTT）

第3の導出規則は，→と－の両方に関わるものである．ふたたびこの規則を表わすのに中世の用語，否定否定式（*modus tollendo tollens*）を用い，これをMTTと略記する．前提として，条件的命題とそれの後件の否定が与えられるならば，MTTはその条件法の前件の否定を結論として導くことを許す．

つぎに挙げるのは，MTTの2つの簡単な用例である．今後は，証明される連式を，その証明の前に掲げるというやり方に従うことにする．

5　$P \to Q$, $-Q \vdash -P$

1	(1)	$P \to Q$	A
2	(2)	$-Q$	A
1, 2	(3)	$-P$	1, 2 MTT

6　$P \to (Q \to R)$, P, $-R \vdash -Q$

1	(1)	$P\to(Q\to R)$	A
2	(2)	P	A
3	(3)	$-R$	A
1, 2	(4)	$Q\to R$	1, 2 MPP
1, 2, 3	(5)	$-Q$	3, 4 MTT

(5)の行について，つぎのことに気づかれる．すなわち，(3)，$-R$は，条件法(4)，$Q\to R$の後件の否定であり，したがってMTTによって，(4)の前件の否定$-Q$を結論できる．すなわち，右側には(3)と(4)を，左側には(1)と(2)――(4)が基づいている仮定――および(3)――(3)が基づいている仮定，すなわち(3)自身――を挙げるのである．

われわれは日常的な例によって，規則MTTの健全性を理解できるであろう．つぎの論証は明らかに健全である．

(4) ナポレオンがシナ人であったならば，彼はアジア人であった．ナポレオンはアジア人ではなかった．故に彼はシナ人ではなかった．

(5) ナポレオンがフランス人であったならば，彼はヨーロッパ人であった．ナポレオンはヨーロッパ人ではなかった．故に彼はフランス人ではなかった．

どちらの場合にも，条件法とその後件の否定が与えられているので，その前件の否定が正しく演繹されるのである．(4)では結論は真である．そして2つの前提もまたそうである．(5)では結論は偽である．しかし前提のひとつもまたそうである．この推論のパターンが，すべてが真である前提から偽なる結論へと導くことは決してないであろうことは明瞭でなければならない．

二重否定（DN）

第4の導出規則は否定のみに関わる．命題Pの二重否定とは，命題$--P$のことであると理解する．雨が降っているということはないということはな

い，と主張するのは，直観的に，雨が降っている，と主張するのと同じである．そしてこのことはどのような命題に対しても成り立つ．すなわち，命題の二重否定はその命題自身と同じである．故に命題の二重否定から，その命題が正しく演繹されることができ，またその逆も成り立つ．二重否定の規則（Rule of double negation）〔DN〕の背後にあるのはこの原理である．すなわち，命題の二重否定が与えられるならば，DN はその命題自身を結論として導くことを許す．また前提として任意の命題が与えられるならば，DN はその命題の二重否定を結論として導くことを許す．MPP や MTT とは違って，DN がその適用のために必要とする前提は1つのみであって，2つではない．その用法はつぎの証明において例示される．

7　$P \rightarrow -Q$，$Q \vdash -P$

1	(1)	$P \rightarrow -Q$	A
2	(2)	Q	A
2	(3)	$--Q$	2 DN
1, 2	(4)	$-P$	1, 3 MTT

特に注意すべき点は，(1)$P \rightarrow -Q$の後件は$-Q$であるから，規則 MTT を適用しうる前に，これの否定，すなわち$--Q$を導く必要があるということである．故に(4)の行で MTT を用いる前に，(2)から(3)を DN によって導くことが必要である．

8　$-P \rightarrow Q$，$-Q \vdash P$

1	(1)	$-P \rightarrow Q$	A
2	(2)	$-Q$	A
1, 2	(3)	$--P$	1, 2 MTT
1, 2	(4)	P	3 DN

特に注意すべき点は，(1)と(2)から MTT によって，(1)の前件の否定，すなわち$--P$を結論として導いていることである．故に，結論Pをうるためには，(3)から(4)を DN を適用することによって導く必要がある．また DN を適用し

てえられる結論は，その前提と正確に同じ仮定に基づいていることに注意していただきたい．

条件的証明（CP）

規則 MPP および MTT によって，ある結論，すなわち条件法の後件，または条件法の前件の否定にあたるものを導くために，条件法のかたちをした前提を，その前件または後件の否定とともに用いることができる．それでは条件法のかたちをした結論を導くにはどのようにすればよいであろうか．最も自然な方法は，証明しようとする条件法の前件を付加的仮定としてとり，そしてその後件を結論として導出することをめざすことである．つまり，これがうまく行けば，この証明をもとの仮定（もしそれがあるとすれば）からの，もとの条件法の証明とみなしてよいであろう．たとえば，すべてのドイツ人はヨーロッパ人であると仮定すれば，ナポレオンがドイツ人であったならば彼はヨーロッパ人であった，ということを，われわれはどのようにして導出するであろうか．当然つぎのように言うであろう．ナポレオンがドイツ人であったと仮定しよう（ここで，証明されるべき条件法の前件を付加的仮定としてとるのである）．しかるに，すべてのドイツ人はヨーロッパ人である（与えられた仮定）．故にナポレオンはヨーロッパ人であった（ここで，後件を結論として導出している）．よって，ナポレオンがドイツ人であったならば彼はヨーロッパ人であった（ここで，論証の前の段階を，求める条件法の証明として取り扱っている）．

第5の導出規則，すなわち条件的証明の規則（Rule of conditional proof）〔CP〕はこの自然な手続を正確に写したものであって，条件法のかたちをした結論を導くための，われわれの最も一般的な方法である．この規則の扱い方は，これまでの規則のそれよりは会得しにくいものではあるが，しかしそれに習熟することがどうしても必要である．まずこの規則を述べ，つぎにそれを例示し，議論しよう．

ある命題（これをBとよぶ）が，その仮定のひとつとして，ある命題（これをAとよぶ）に依存しているとしよう．その場合，CPは，残りの仮定（もしそれがあるならば）に基づいて，結論A→Bを導出することを許す．換言すれば，証明のある段階において，仮定A（および恐らくは他の仮定と）から結論Bが導出されたとするならば，CPはこれを，A以外の仮定（もしそれがあるならば）からのA→Bの証明とみなすことを可能ならしめる．

たとえば，

9　$P \to Q \vdash -Q \to -P$

1	(1)	$P \to Q$	A
2	(2)	$-Q$	A
1, 2	(3)	$-P$	1, 2 MTT
1	(4)	$-Q \to -P$	2, 3 CP

条件法$-Q \to -P$を$P \to Q$から導出しようとする場合に，われわれはまず前件$-Q$を(2)の行に仮定し，そしてその後件$-P$を(3)の行において導出する．CPにより，(4)の行において，これを仮定(1)だけからの，$-Q \to -P$の証明として取り扱うことが可能となる．右側には，第1に，仮定された前件の番号，第2に，結論された後件の番号を示す．左側においては，(3)の行の仮定(2)は消え，これが新しい条件法の前件になっていて，(1)だけが残っている．CPを適用する際にはいつも，このようにして仮定の数がひとつずつ減って行くのであって，この省かれた仮定を，取り除かれた仮定 (discharged assumption) とよぶ．

10　$P \to (Q \to R) \vdash Q \to (P \to R)$

1	(1)	$P \to (Q \to R)$	A
2	(2)	Q	A
3	(3)	P	A
1, 3	(4)	$Q \to R$	1, 3 MPP
1, 2, 3	(5)	R	2, 4 MPP

1, 2	(6)	$P \to R$	3, 5 CP
1	(7)	$Q \to (P \to R)$	2, 6 CP

これは CP を二重に用いた，より複雑な例である．条件法$Q \to (P \to R)$を$P \to (Q \to R)$ から導出しようとする場合に，まず(2)の行にその前件Qを仮定し，その後件$P \to R$を導出することをめざす．しかるに後件もまた条件法であるから，(3)の行にその前件Pを仮定し，その後件Rを導出することをめざす．これは MPP を 2 回適用すること（(4)と(5)の行）によってはたされる．(6)の行でわれわれは，CP によってこの結果を仮定(1)と(2)からの $P \to R$の証明として取り扱い，右側には(3)の行（前件の仮定）と(5)の行（後件の導出）を記入する．つぎにこれを(7)の行で，仮定(1)だけからの$Q \to (P \to R)$の証明として取り扱い，右側に(2)の行（前件の仮定）と(6)の行（後件の導出）を記入する．前の例と同様，左側の仮定は，CP を 1 回適用するたびに，ひとつずつ減る．

11　$Q \to R \vdash (-Q \to -P) \to (P \to R)$

1	(1)	$Q \to R$	A
2	(2)	$-Q \to -P$	A
3	(3)	P	A
3	(4)	$--P$	3 DN
2, 3	(5)	$--Q$	2, 4 MTT
2, 3	(6)	Q	5 DN
1, 2, 3	(7)	R	1, 6 MPP
1, 2	(8)	$P \to R$	3, 7 CP
1	(9)	$(-Q \to -P) \to (P \to R)$	2, 8 CP

この証明はこれまでに導入された 5 つの導出規則をすべて用いていて，研究に値する．複合的な条件法を証明することを目標として，われわれはその前件$-Q \to -P$を(2)の行に仮定し，その後件$P \to R$を証明しようとするのである．これは条件法であるから，その前件Pを(3)の行に仮定する．そしてDN，

MTT，MPP を適用する一連の手続のあと，(7)において後件Rを導出する．10の証明において，最後にCPを2回適用したのと同様に，CPを2回適用することによって，仮定(3)および(2)が順に除去され，演繹が完成する．

証明10と11は，結論が複合的な条件法である連式の証明を発見する上に，有益で重要な一般的方法を示唆している．連式のなかに与えられている仮定に対して，規則Aを適用した後，さらに求める条件法のかたちをした結論の前件をも仮定し，その後件を証明することをめざす．これがまた条件法ならば，その前件を仮定してその後件を証明することをめざす．この手続を繰り返して，最後に非条件法的結論を証明することが目標とされるにいたるまで，これを続けるのである．この結論がわれわれの現にもっている仮定から導出できるならば，適当な回数だけ CP を逆の順序に適用することによって，もとの連式が証明されるであろう．

この節を終えるにあたって，2つのよくある誤謬に注意しておこう．これらはよくある誤謬なので名前がついている．規則 MPP によれば，ある条件法が真で，その前件もまた真ならば，その後件を健全に導出できる．それでは，ある条件法が真で，その後件もまた真ならば，その前件を結論することは健全であろうか．それが健全でないことは，つぎの例が示す通りである．すべてのドイツ人はヨーロッパ人であるから，ナポレオンがドイツ人であったならば彼はヨーロッパ人であった，は真である．そして，ナポレオンはヨーロッパ人であった，は真である．しかし，ナポレオンはドイツ人であった，は偽であって，従ってこれらの真なる前提から，健全に演繹されることはできないのである．条件法とその後件から，条件法の前件を導出することが健全であると考えるのは，後件肯定の誤謬 (fallacy of affirming the consequent) を犯すことである．また，規則 MTT によれば，ある条件法が真で，その後件の否定も真ならば，その前件の否定を健全に導出できる．しかし条件法の後件の否定を，条件法そのものとその前件の否定とから導出するのは健全ではないのであって，それを健全であると考えるのは，前件否定の誤謬 (fallacy

of denying the antecedent）を犯すことである．さきのと同じ例が用いられよう．ナポレオンがドイツ人であったならば彼はヨーロッパ人であった，は真である．ナポレオンはドイツ人ではなかった，もまた真である．しかし，ナポレオンはヨーロッパ人ではなかった，は真ではない．

図式的に書くならば，連式

1　$P \rightarrow Q,\ P \vdash Q$　および

5　$P \rightarrow Q,\ -Q \vdash -P$

は，われわれが証明した通り，健全な推論のパターンである．しかし連式

6　$P \rightarrow Q,\ Q \vdash P$　および

7　$P \rightarrow Q,\ -P \vdash -Q$

は，(6)，(7)の仮定が真となるのに，その結論は偽となるような，命題P，Qの例を見出すことによって示された通り，健全なパターンではない．というのは，すべてが真である仮定から偽なる結論へと導くことが決してないというのが，健全な論証のパターンの必要条件だからである．事実，(6)は後件肯定の誤謬のパターンであり，(7)は前件否定の誤謬のパターンである．

練　習　問　題

1　これまでに導入された導出規則を用いて，つぎの連式の証明を見出せ．

（a）　$P \rightarrow (P \rightarrow Q),\ P \vdash Q$

（b）　$Q \rightarrow (P \rightarrow R),\ -R,\ Q \vdash -P$

（c）　$P \rightarrow --Q,\ P \vdash Q$

（d）　$--Q \rightarrow P,\ -P \vdash -Q$

（e）　$-P \rightarrow -Q,\ Q \vdash P$

（f）　$P \rightarrow -Q \vdash Q \rightarrow -P$

（g）　$-P \rightarrow Q \vdash -Q \rightarrow P$

（h）　$-P \rightarrow -Q \vdash Q \rightarrow P$

（i）　$P \rightarrow Q,\ Q \rightarrow R \vdash P \rightarrow R$

（j）　$P \to (Q \to R) \vdash (P \to Q) \to (P \to R)$

（k）　$P \to (Q \to (R \to S)) \vdash R \to (P \to (Q \to S))$

（l）　$P \to Q \vdash (Q \to R) \to (P \to R)$

（m）　$P \vdash (P \to Q) \to Q$

（n）　$P \vdash (-(Q \to R) \to -P) \to (-R \to -Q)$

2　仮定が真，結論が偽となるような，PとQに対する実際の命題を見出すことによって，つぎの連式が不健全な論証のパターンであることを示せ．

（a）　$P \to -Q,\ -P \vdash Q$

（b）　$-P \to -Q,\ -Q \vdash -P$

（c）　$P \to Q \vdash Q \to P$

注1）従ってわれわれは，証明を連式の証明として理解する。しかしまた，違った意味において，証明のなかでは結論がある仮定から証明されるというのも自然である。このようにして「証明」という語には多義性が生じるが，それは全く無害である。

第3節　連言と選言

前の節に，論理学者にとって重要なものとして言及された，文に作用して文を形成する4つの演算記号のうち，2つだけがこれまでに論じられた．「………ならば………」と「でない」がそれである．この節では，「………そして………」と「………あるいは………」を含む論証に対する規則を導入する．

PとQを任意の2つの命題としよう．すると，PそしてQという命題は，PとQの連言（conjunction）とよばれ，

$$P \& Q$$

と書かれる．PとQは連言$P \& Q$の連言項とよばれる．同様に，PあるいはQという命題は，PとQの選言（disjunction）とよばれ，

$$P \vee Q$$

と書かれる．PとQは選言$P \vee Q$の選言項とよばれる．（記号‘v’は，ラテ

ン語の 'aut' に対するものとしての 'vel' を，古典学者に思い起こして貰おうとするものである．というのは，$P \vee Q$ は P と Q がともに真である可能性を排除しないものと理解されるからである。)

&に関しては2つの導出規則，すなわち，&−導入の規則 (Rule of &-introduction) と&−除去の規則 (Rule of &-elimination) がある．また，∨に関しても2つの導出規則，すなわち，∨−導入の規則 (Rule of ∨-introduction) と∨−除去の規則 (Rule of ∨-elimination) がある．導入の規則は，&あるいは∨を含む結論を導出することを可能にする，という目的に応ずるものであり，一方除去の規則は，&あるいは∨を含む前提を用いることを可能にする，という目的に応ずるものである．順にこれらの規則を論じ，その例を示そう．

&−導入 (&I)

&−導入の規則 (&I) は，ことのほか容易におぼえられる．前提として任意の2つの命題が与えられるならば，&I はそれらの連言を結論として導出することを許す．この規則は明らかに健全な推論の原理に合致している．なぜならば，Aが真でありそしてBが真であるならば，A&Bは真でなければならないのは明白だからである．つぎの証明は&I を用いた例である．

12　P, $Q \vdash P \& Q$

1	(1)	P	A
2	(2)	Q	A
1, 2	(3)	$P \& Q$	1, 2 &I

(3)の行において，&I によって，仮定(1)と(2)の連言が結論される．右側には，&I の適用のための前提として(1)と(2)を挙げる．左側には，これらの前提が基づいている仮定――ここでは前提そのもの――をプールしたものを挙げる．

13　$(P \& Q) \rightarrow R \vdash P \rightarrow (Q \rightarrow R)$

1	(1)	$(P \& Q) \rightarrow R$	A
2	(2)	P	A

3	(3)	Q	A
2, 3	(4)	$P \& Q$	2, 3 &I
1, 2, 3	(5)	R	1, 4 MPP
1, 2	(6)	$Q \rightarrow R$	3, 5 CP
1	(7)	$P \rightarrow (Q \rightarrow R)$	2, 6 CP

条件法 $P \rightarrow (Q \rightarrow R)$ を証明しようとする場合には，第1にその前件 P を仮定し（(2)の行），第2にその後件の前件 Q を仮定する（(3)の行）．(4)の行において &I を適用することによって，これらの仮定の連言が与えられ，そこで MPP を適用することが可能となり，(5)の行において R がえられる．CP を2回適用することによって証明が完成する．

&-除去（&E）

&-除去の規則も同様に簡単である．前提として任意の連言が与えられると，&E はどちらの連言項をも結論として導出することを許す．この規則もまた明らかに健全である．なぜならば，A & B が真ならば，A だけも B だけも真でなければならないことは明白だからである．つぎのような例が挙げられる．

14　$P \& Q \vdash P$

1	(1)	$P \& Q$	A
1	(2)	P	1 &E

15　$P \& Q \vdash Q$

1	(1)	$P \& Q$	A
1	(2)	Q	1 &E

16　$P \rightarrow (Q \rightarrow R) \vdash (P \& Q) \rightarrow R$

1	(1)	$P \rightarrow (Q \rightarrow R)$	A
2	(2)	$P \& Q$	A
2	(3)	P	2 &E
2	(4)	Q	2 &E

1, 2	(5)	$Q \to R$	1, 3 MPP
1, 2	(6)	R	4, 5 MPP
1	(7)	$(P \& Q) \to R$	2, 6 CP

求められているのは，条件法のかたちをした結論$(P \& Q) \to R$であるから，(2)の行においてその前件を仮定し，Rを導くことをめざす．&E は(3)と(4)の行で用いられ，連言項PおよびQが別個に導かれる．これらは(5)と(6)の行における MPP の適用のために必要とされるものである．&E を適用する際，右側には前提として用いられた連言を，左側にはその連言が基づいている仮定を挙げるのである．

規則 &I と &E が同じ証明のなかで合わせて用いられることがしばしばある．たとえば，

17　$P \& Q \vdash Q \& P$

1	(1)	$P \& Q$	A
1	(2)	P	1 &E
1	(3)	Q	1 &E
1	(4)	$Q \& P$	3, 2 &I

18　$Q \to R \vdash (P \& Q) \to (P \& R)$

1	(1)	$Q \to R$	A
2	(2)	$P \& Q$	A
2	(3)	P	2 &E
2	(4)	Q	2 &E
1, 2	(5)	R	1, 4 MPP
1, 2	(6)	$P \& R$	3, 5 &I
1	(7)	$(P \& Q) \to (P \& R)$	2, 6 CP

条件法のかたちをした結論$(P \& Q) \to (P \& R)$が求められている．それ故前件$P \& Q$を仮定し，$P \& R$を導くことを目標とする．この目標はPとRを別個に求めることであると言い直してもよい．それから，&I によって$P \& R$

が導かれるからである．Pは$P \& Q$から&Eによって導かれ，Qも同様である．そしてQは(1)の行と合わせて，MPPによってRを導く（(5)の行）ために用いられる．&Iが(6)の行で用いられるとき，その前提は(3)と(5)であり，これらはそれぞれ，仮定(2)と，仮定(1)，(2)に基づいている．故にこれらをプールしたもの——(1)と(2)——が左側に挙げられる．

v-導入（vI）

v-導入の規則はvIと名づけられる．任意の命題が前提として与えられたならば，vIは，その命題と任意の命題との選言を結論として導出することを許す．従って，前提としてのPから，$P \vee Q$を結論として，あるいは$Q \vee P$を結論として導出することができる．またこの場合，Qがどのような命題であるかは問うところではない．明らかに，vIの適用においては，一般に結論は前提より遙かに力が弱い．すなわち，Pが真でないときでも，PあるいはQは真でありうる．それにもかかわらず，この規則は，Pが真であるときには，PあるいはQもまた真でなければならない，という意味において受けいれられるのである．たとえば，チャールズI世が斬罪に処せられたということは真である．このことから，彼は斬罪に処せられたかあるいは電気椅子に送られたかであるということが，もちろん彼は電気椅子に送られなかったにもかかわらず，導かれるのである．選言$P \vee Q$は，その選言項の少なくとも1つが真であるならば真である．従って規則vIは，真なる前提から偽なる結論へ導くことはありえない（退屈な結論へ導くことはあるとしても）．

v-除去（vE）

v-除去の規則（vE）は幾分より複雑である．まず規則を述べ，つぎにそれを説明し，根拠づけ，そして最後にvEとvIの両方を例示しよう．A，BおよびCを任意の3つの命題としよう．そして，（a）A v Bが与えられており，（b）仮定としてのAから，Cを結論として導出でき，（c）仮定としてのBか

ら，Cを結論として導出できる，としよう．その場合には，vE は，A v B が基づいている仮定と，CがAから導出される際に基づいている（Aそのもの以外の）仮定と，CがBから導出される際に基づいている（Bそのもの以外の）仮定とから，Cを導出することを許す．vE が適用される典型的な状況は，たとえばつぎのような場合である．前提として選言A v Bがあり，ある結論Cを導出することが求められているとする．われわれは第1に第1の選言項AからCを導出し，第2に第2の選言項BからCを導出することをめざす．論証のこれらの局面が完了すれば，上の(*a*)，(*b*)，および(*c*)に記述された状況がえられ，そこで vE を適用してA v Bから直ちに結論Cを導くことができる．右側には，不幸にして，5つもの行を挙げる必要がある．(i)A v Bが現われる行，(ii)Aが仮定される行，(iii)CがAから導出される行，(iv)Bが仮定される行，(v)CがBから導出される行．また左側にあっては，結論は，3つの由来をもつ，やや複雑な仮定のプールに基づくことになるであろう．すなわち，(i)A v Bが基づく仮定，(ii)CがAからの導出において基づく，Aそのもの以外の仮定，(iii)CがBからの導出において基づく，Bそのもの以外の仮定．

正確に述べようとすると複雑になるが，規則 vE は，全く自然な推論の原理に合致している．AあるいはBである，すなわちAあるいはBの一方が真であるとし，またAを仮定すればCが真であることを示しうる，すなわちAが成り立てばCが成り立つとし，またBという仮定からもやはりCが成り立つことを示しうる，すなわちBが成り立てばCもまた成り立つ，としよう．そうすれば，いずれにしてもCは成り立つ．たとえば，雨が降っているかあるいは晴れているかである，ということに諸君が同意するとしよう（A v B)．雨が降っているならば，散歩に出かけるには適しない（AからCが導出される)．晴れているならば，たいそう暑いに違いないので，また散歩に出かけるには適しない（BからCが導出される)．故に，いずれにしても散歩に出かけるには適しない（Cが結論される)．

19　$P \vee Q \vdash Q \vee P$

1	(1)	$P \vee Q$	A
2	(2)	P	A
2	(3)	$Q \vee P$	2 vI
4	(4)	Q	A
4	(5)	$Q \vee P$	4 vI
1	(6)	$Q \vee P$	1, 2, 3, 4, 5 vE

(1)の行で$P \vee Q$を仮定する．これは選言であるから，第1の選言項Pから結論$Q \vee P$を導出することをめざし，Pを(2)の行に仮定する．また第2の選言項Qからも$Q \vee P$を導出することをめざし，Qを(4)の行に仮定する．これらの目標は，(3)と(5)の行で，明白であるべき vI の適用によってはたされる．(6)の行において，仮定(1)から直ちに$Q \vee P$を結論する．なぜならば，$Q \vee P$はPからも導かれ，Qからも導かれるからである．右側には，(1)の行（選言），(2)の行（第1の選言項の仮定），(3)の行（第1の選言項からの結論の導出），(4)の行（第2の選言項の仮定），(5)の行（第2の選言項からの結論の導出）を挙げる．左側には，選言が基づいている仮定（ここでは，(1)はそれ自身に基づいている故，(1)を挙げる）と，選言項から結論を導出するのに用いられた仮定で，選言項そのもの以外のもの（(3)と(5)の行の左側の数字を調べてみれば，そのような仮定はないことがわかる）を挙げる．証明の左側に仮定を正確に記録することがいかに重要かを，この証明ははっきり示しているであろう．この証明の(3)と(5)の行は，なるほど正しい結論$Q \vee P$を与えはするが，それは正しい仮定(1)からの結論ではない．それを導くという目標は，(6)の行で初めてはたされるのである．そこで(6)の行は，左側の注記が，(3)と(5)の行とは異なっている．

20　$Q \rightarrow R \vdash (P \vee Q) \rightarrow (P \vee R)$

1	(1)	$Q \rightarrow R$	A
2	(2)	$P \vee Q$	A

3	(3)	P	A
3	(4)	$P \vee R$	3 vI
5	(5)	Q	A
1, 5	(6)	R	1, 5 MPP
1, 5	(7)	$P \vee R$	6 vI
1, 2	(8)	$P \vee R$	2, 3, 4, 5, 7 vE
1	(9)	$(P \vee Q) \rightarrow (P \vee R)$	2, 8 CP

この証明においては，求める結論は条件法である．従ってその前件$P \vee Q$を仮定し（(2)の行），$P \vee R$を導出することをめざす．この仮定は選言であるから，各選言項を順に仮定し（(3)と(5)の行），それぞれから結論$P \vee R$を導出する（(4)と(7)の行）．それ故(8)の行の右側の数字は2, 3, 4, 5, 7 である．(8)の行での仮定は，選言$P \vee Q$の仮定（これは$P \vee Q$そのもの，すなわち(2)），そして(3)から$P \vee R$を導くのに用いられた，(3)そのもの以外の仮定（(4)の示す通り，それは存在しない）と，(5)から$P \vee R$を導くのに用いられた，(5)そのもの以外の仮定（つまり，(7)の示す通り，(1)）である．CP を適用することによって，(1)からの求める条件法の証明は完成する．

21　$P \vee (Q \vee R) \vdash Q \vee (P \vee R)$

1	(1)	$P \vee (Q \vee R)$	A
2	(2)	P	A
2	(3)	$P \vee R$	2 vI
2	(4)	$Q \vee (P \vee R)$	3 vI
5	(5)	$Q \vee R$	A
6	(6)	Q	A
6	(7)	$Q \vee (P \vee R)$	6 vI
8	(8)	R	A
8	(9)	$P \vee R$	8 vI
8	(10)	$Q \vee (P \vee R)$	9 vI

5 (11) $Q \vee (P \vee R)$ 5, 6, 7, 8, 10 vE

1 (12) $Q \vee (P \vee R)$ 1, 2, 4, 5, 11 vE

この証明は，vI と vE がともに用いられている点で，詳細に研究されるに値する．括弧の用法によく注意することが必要である．仮定は選言であり，その第2の選言項はそれ自身また選言である．証明は2つの異なった部分，(2)－(4)と(5)－(11)にわかれる．第1の部分は，求める結論をもとの選言の第1の選言項から証明し（(4)の行），第2の部分は同じ結論を第2の選言項から証明する（(11)の行）．このことから，最後に(12)の行で，vE が適用される理由がわかるであろう．第2の部分（(5)－(11)）は，選言の仮定で始まるので，また2つの小さい部分にわかれ，(11)の行での vE の補助的な適用を含むことになる．(6)－(7)は，結論を(5)の第1の選言項Qから導き，(8)－(10)は，結論を(5)の第2の選言項Rから導く．それ故，この証明においては，5回もその都度異なった仮定から，最終の結論が導かれるのである．

背理法（RAA）

この段階で導入されるべき最後の規則は，多くの点で最も強力であり，最も役に立つものである．それは，正確に述べることはすこし難かしいが，容易に理解されるものである．われわれはそれを背理法の規則 (Rule of *reductio ad absurdum*)〔RAA〕とよぶであろう．まず矛盾 (contradiction) を定義しよう．矛盾とは，第2の連言項が第1の連言項の否定であるような連言のことである．たとえば，$P \& -P$，$R \& -R$，$(P \rightarrow Q) \& -(P \rightarrow Q)$はすべて矛盾である．さて，ある仮定Aから，恐らく他の仮定をも用いて，矛盾が結論として導出されうるとしよう．この場合には，RAAは－Aを結論として，それらの他の仮定（もしあるならば）から導出することを許す．この規則は，ある命題Aから矛盾が演繹されうるならば，Aは真であるはずはない．従ってわれわれはその否定－Aを主張する資格がある，という自然な原理に基づいている．

つぎに例を挙げよう．

22　$P \to Q$, $P \to -Q \vdash -P$

1	(1)	$P \to Q$	A
2	(2)	$P \to -Q$	A
3	(3)	P	A
1, 3	(4)	Q	1, 3 MPP
2, 3	(5)	$-Q$	2, 3 MPP
1, 2, 3	(6)	$Q \& -Q$	4, 5 &I
1, 2	(7)	$-P$	3, 6 RAA

これはRAAの用法の典型的な例である．結論$-P$を導くことをめざしてPを仮定し（(3)の行），それから矛盾を導出しようと考える．なぜなら，Pを仮定することが矛盾に導くならば，RAAによって$-P$を結論することができるからである．矛盾$Q \& -Q$が(6)の行でえられるので，(7)の行で$-P$が結論される．右側には，矛盾に導くと結論される仮定——RAAを適用する際にその否定が結論されることになる仮定，この例では(3)——と，矛盾そのもの，この例では(6)，とを挙げる．左側においては，CPを適用するときと同じように，仮定の数が1つだけ減る．なぜならば，矛盾に導くと結論される仮定は除去されるからである．

23　$P \to -P \vdash -P$

1	(1)	$P \to -P$	A
2	(2)	P	A
1, 2	(3)	$-P$	1, 2 MPP
1, 2	(4)	$P \& -P$	2, 3 &I
1	(5)	$-P$	2, 4 RAA

ここでもまた，$-P$を求めてPを仮定し（(2)の行），矛盾を導く（(4)の行）．故に，(1)が与えられるならば$-P$が，RAAによって結論されるのである．証明された連式は特徴的で，恐らく予期されなかったものであろう——ある命題が真ならばその否定が真であるとすれば，その否定は真であると結論す

ることができる．これはわれわれの規則によって証明される第1の驚くべき結果ではあるが，そうした結果はまだほかにも出てくるであろう．

規則 RAA は，特に否定的結論を導出しようと思うときに役に立つ．直接的証明をくわだてるかわりに，否定的結論に対応する肯定的命題を仮定して矛盾を導出することをめざし，このようにして間接的に否定的命題を証明することが，この規則の示唆するところである．しかしながら，この規則はまた，肯定的命題そのものを，DN によって，証明するためにも用いられうる．Aを導出したい場合に，－Aを仮定して矛盾を導く．そこから RAA によって－－A（仮定したものの否定）を結論でき，従って DN によってAが導出される．直接証明をやってみてうまく行かない場合には，しばしば RAA による証明が成功することがあるというのは，証明の発見のための有益な一般的ヒントである．

これまでに10個の導出規則が導入された．われわれは第3章までは，このほかの新しい規則を必要とはしないであろう．

練　習　問　題

1　つぎの連式の証明を見出せ．

（a）　$P \vdash Q \rightarrow (P \,\&\, Q)$

（b）　$P \,\&\, (Q \,\&\, R) \vdash Q \,\&\, (P \,\&\, R)$

（c）　$(P \rightarrow Q) \,\&\, (P \rightarrow R) \vdash P \rightarrow (Q \,\&\, R)$

（d）　$Q \vdash P \vee Q$

（e）　$P \,\&\, Q \vdash P \vee Q$

（f）　$(P \rightarrow R) \,\&\, (Q \rightarrow R) \vdash (P \vee Q) \rightarrow R$

（g）　$P \rightarrow Q,\ R \rightarrow S \vdash (P \,\&\, R) \rightarrow (Q \,\&\, S)$

（h）　$P \rightarrow Q,\ R \rightarrow S \vdash (P \vee R) \rightarrow (Q \vee S)$

（i）　$P \rightarrow (Q \,\&\, R) \vdash (P \rightarrow Q) \,\&\, (P \rightarrow R)$

（j）　$-P \rightarrow P \vdash P$

2　PおよびQに対して，仮定が真で結論が偽であるような，日常言語による命題を見出すことによって，つぎの連式が不健全であることを示せ．

（a）　$P \vdash P \& Q$

（b）　$P \vee Q \vdash P$

（c）　$P \vee Q \vdash P \& Q$

（d）　$P \rightarrow Q \vdash P \& Q$

第4節　相互条件法

これまでに導入されなかった，文に作用して文を形成する演算記号で，日常言語のなかでは出てくることも稀れであるとはいえ，論理学者にとってはなかなか重要なものがある．それは「……であるときまたそのときに限って……」(‘……if and only if……’) である．この節ではこれを研究する．

まず第1に，「……ならば……」と「……であるときに限って……」の違いを考えてみよう．つぎの2つの命題を比較してみよう．

(1)　雪が降るならば寒くなる．

(2)　雪が降るときに限って寒くなる．

(1)が主張しているのは，雪が降ることが寒くなるために十分である，ということである．しかるに(2)の主張しているのは，雪が降ることが寒くなるために必要である，ということ，すなわち，寒くなるべきであるならば，雪が降らねばならない，ということである．従って，PならばQということが真であるときにはつねに，PはQの十分条件であり，Pであるときに限ってQであるということが真であるときにはつねに，PはQの必要条件である．この基本的区別をより明瞭にするために，つぎの2つの命題を比較してみよう．

(3)　ガラスをハンマーで打つならばガラスは割れる．

(4)　ガラスをハンマーで打つときに限ってガラスは割れる．

(3)は大いに真らしいが，(4)ははなはだ偽らしい．ハンマーをふるう以外にもガラスを割る方法はあるからである．他方，つぎの2つの命題，

(5) ねじ回しを使うならばあの堅いねじ釘をゆるめられるだろう.

(6) ねじ回しを使うときに限ってあの堅いねじ釘をゆるめられるだろう.

のうち，(5)は偽であってもよいであろう（ねじ回しを使っても，やはりねじ釘はゆるめられないこともあろう）が，(6)は真であってもよい．ねじ回しを使用するほかにはねじ釘を回す方法はないだろうからである．ハンマーで打つことはガラスを割るための（恐らくは）十分条件であるが必要条件ではない．ねじ回しを使うことは堅いねじ釘を回すための（恐らくは）必要条件であるが十分条件ではない.

科学や数学の推論においては，従って論理学においては，しばしば，十分でもあり必要でもある条件に関心がもたれる．PがQに対する必要十分条件であるのは，Qが成り立つときまたそのときに限ってPが成り立つ場合である．故にわれわれは「……であるときまたそのときに限って……」に関心があるのである．そこで「……であるときまたそのときに限って……」を表わす特別の記号が必要であるようにみえる．しかしそうではないことはつぎのようにしてわかるであろう.

Pであるときに限ってQであるとするならば，PはQの必要条件である．すなわち，Qが真であるためにはPが真であることが必要である．故にQが真ならばPも真である．たとえば，先程の例を用いて，ねじ回しを使うことはねじ釘を回すための必要条件であるとしよう．するとねじ釘が回るならばねじ回しが使われたことになる．要するに，Pであるときに限ってQである (only if P then Q) とすれば，われわれはQならばPであると推論できるのである．逆に，QならばPであるとしよう．すると，Qが真であるためにはPが真であることが必要である．なぜならば，Qが真であってPが真でないならば，QならばPは成り立ちえないからである．故にPはQの必要条件である．すなわち，Pであるときに限ってQである．これら2つの論証が示し

ているように，Pであるときに限ってQであると主張するのは，QならばPであると主張するのにほかならないことがわかる．故に「Pであるときに限ってQである」を記号的に表現するには‘→’を用いて，簡単につぎのように書けばよい．

$$Q \rightarrow P$$

故に，Pであるときまたそのときに限ってQ（Q if and only if P）を主張することは，PならばQと，Pであるときに限ってQとを主張することであり，これは，PならばQと，QならばPとを主張することにほかならない．すなわち記号で書けば，

$$(P \rightarrow Q) \& (Q \rightarrow P)$$

である．しかしこの複合的表現を用いるよりは，2重の矢印を採用して，省略記号として

$$P \longleftrightarrow Q$$

と書くのが便利であろう．（この記号は，PとQの関係の相互性を強調するのに役立つ.）命題$P \longleftrightarrow Q$をPとQの相互条件法（biconditional）とよぶ．

論証における相互条件法の特性は何であろうか．前の2節で4つの演算記号に対してしたのと同じように，この演算記号に対しても導出規則を定めることができるであろう．しかし実際には，‘⟷’の特性は‘&’と‘→’のそれから直ちに導かれる．‘&’と‘→’によって相互条件法を定義したばかりなのだからである．たとえば，

24　$P \longleftrightarrow Q \vdash Q \longleftrightarrow P$

1	(1)	$P \longleftrightarrow Q$	A
1	(2)	$(P \rightarrow Q) \& (Q \rightarrow P)$	1
1	(3)	$P \rightarrow Q$	2 &E
1	(4)	$Q \rightarrow P$	2 &E
1	(5)	$(Q \rightarrow P) \& (P \rightarrow Q)$	4, 3 &I
1	(6)	$Q \longleftrightarrow P$	5

この証明では，(1)から(2)へ進む段階は，'$P \longleftrightarrow Q$' を '$(P \rightarrow Q) \& (Q \rightarrow P)$' の省略記号とみなすことによって根拠づけられる．すなわち，(2)においては，(1)において仮定されたことを展開したに過ぎない．同様に，しかし逆に，(5)から(6)へ進む段階も根拠づけられる．なぜなら(6)は結論(5)の省略された書き方に過ぎないからである．しかしながら，われわれはそうした段階をもっと正確に承認する必要がある．そしてこのために，つぎのような相互条件法の形式的定義を導入するのである．

$$Df.\ \longleftrightarrow :\ \mathrm{A} \longleftrightarrow \mathrm{B} = (\mathrm{A} \rightarrow \mathrm{B}) \& (\mathrm{B} \rightarrow \mathrm{A}).$$

この定義はつぎのようなことを非常に圧縮して言っているものと考えることができる．すなわち，任意の2つの文A，Bが与えられたとき，証明のなかでA$\longleftrightarrow$Bを（A→B)&(B→A）によって置き換えることが許され，またその逆も許される，ということである．この定義が適用されるときには，その行の右側に，'$Df.\ \longleftrightarrow$' と記すことにする．上の証明の(2)と(6)の行は，実際にそのように注記されるべきものなのである．つぎの二三の証明はこの定義が用いられた例である．

25　$P,\ P \longleftrightarrow Q \vdash Q$

1	(1)	P	A
2	(2)	$P \longleftrightarrow Q$	A
2	(3)	$(P \rightarrow Q) \& (Q \rightarrow P)$	2 $Df.\ \longleftrightarrow$
2	(4)	$P \rightarrow Q$	3 &E
1, 2	(5)	Q	1, 4 MPP

26　$P \longleftrightarrow Q,\ Q \longleftrightarrow R \vdash P \longleftrightarrow R$

1	(1)	$P \longleftrightarrow Q$	A
2	(2)	$Q \longleftrightarrow R$	A
1	(3)	$(P \rightarrow Q) \& (Q \rightarrow P)$	1 $Df.\ \longleftrightarrow$
1	(4)	$P \rightarrow Q$	3 &E
1	(5)	$Q \rightarrow P$	3 &E

2	(6)	$(Q\rightarrow R)\&(R\rightarrow Q)$	2 *Df.* $\longleftrightarrow$
2	(7)	$Q\rightarrow R$	6 &E
2	(8)	$R\rightarrow Q$	6 &E
9	(9)	P	A
1, 9	(10)	Q	4, 9 MPP
1, 2, 9	(11)	R	7, 10 MPP
1, 2	(12)	$P\rightarrow R$	9, 11 CP
13	(13)	R	A
2, 13	(14)	Q	8, 13 MPP
1, 2, 13	(15)	P	5, 14 MPP
1, 2	(16)	$R\rightarrow P$	13, 15 CP
1, 2	(17)	$(P\rightarrow R)\&(R\rightarrow P)$	12, 16 &I
1, 2	(18)	$P\longleftrightarrow R$	17 *Df.* $\longleftrightarrow$

Df. $\longleftrightarrow$によって$P\longleftrightarrow R$を導出するためには，$(P\rightarrow R)\&(R\rightarrow P)$を導出する必要があり，その各連言項を個別的に導くことが目標とされる．証明の最初から8行は，*Df.* $\longleftrightarrow$と&Eを適用して，仮定に含まれていることがらを個条書きにしたに過ぎない．これらのことがら（(4)，(5)，(7)，(8)の行）はつぎに，すぐさま，要求される2つの連言項を導出するために用いられる（(9)－(12)と(13)－(16)）．

27　$(P\&Q)\longleftrightarrow P\vdash P\rightarrow Q$

1	(1)	$(P\&Q)\longleftrightarrow P$	A
1	(2)	$((P\&Q)\rightarrow P)\&(P\rightarrow(P\&Q))$	1 *Df.* $\longleftrightarrow$
1	(3)	$P\rightarrow(P\&Q)$	2 &E
4	(4)	P	A
1, 4	(5)	$P\&Q$	3, 4 MPP
1, 4	(6)	Q	5 &E
1	(7)	$P\rightarrow Q$	4, 6 CP

Aを文‘$P \& Q$’，Bを文‘P’と置けば，$Df.\longleftrightarrow$によって，(1)は(2)の省略された書き方である．

28　$P \& (P \longleftrightarrow Q) \vdash P \& Q$

1	(1)	$P \& (P \longleftrightarrow Q)$	A
1	(2)	$P \& ((P \rightarrow Q) \& (Q \rightarrow P))$	1 $Df.\longleftrightarrow$
1	(3)	P	2 &E
1	(4)	$(P \rightarrow Q) \& (Q \rightarrow P)$	2 &E
1	(5)	$P \rightarrow Q$	4 &E
1	(6)	Q	3, 5 MPP
1	(7)	$P \& Q$	3, 6 &I

27の証明において$Df.\longleftrightarrow$が適用されたときには，それは文全体に適用された．すなわち，それが適用された文は，A$\longleftrightarrow$Bという形式のものであった．しかしこれは本質的なことではない．28の証明では，実際，(2)の行において，$Df.\longleftrightarrow$が(1)の行の第2の連言項に適用されている．

$Df.\longleftrightarrow$は，証明における論証の進め方を根拠づける点においては，これまでに導入された10個の導出規則と同じではあるが，他の規則と同等の資格の，いまひとつの規則と考えられるべきではない．証明のなかにおけるその役割は，結論を前提から本来の意味において導出できるようにするというよりは，むしろひとつの記号的速記法を利用できるようにすることである．たまたまある目的のために$(P \rightarrow Q) \& (Q \rightarrow P)$のような複合的命題に関心がもたれ，そしてそれの研究を容易ならしめるために，その表現を‘$P \longleftrightarrow Q$’のような文に簡略化することに同意するのである．それは直観的な理解を助けるものであり，人間的弱点から生ずる困難をなだめるために用いられるものである．もし困難を物ともしないのならば，たとえば上の27のかわりに，つぎの命題を証明すればよいであろう．

(7)　$((P \& Q) \rightarrow P) \& (P \rightarrow (P \& Q)) \vdash P \rightarrow Q$.

しかしわれわれが用いた表現は，(7)の表現を用いた場合には見逃がされるか

もしれないパターンを明らかにしている．それ故，この省略された書き方を証明のなかで利用したいとするならば，'⟷' を含む文をそれを含まない文に変形する方法と，また'⟷'を含まない正しい形式の文をそれを含む文に変形する逆の方法が必要となる．その方法こそ *Df.* ⟷が与えるものなのである．問題点をすこし違った言い方で述べるならば，'⟷' がもつと思われる論理的特性はすべて，記号的に擬装した'&'と'→'の特性に過ぎないのである．

Df. ⟷のような定義は，証明のなかでの導入と除去を支配する規則から意味が知られている記号，'→'および'&'によって，記号'⟷'の意味を規約する，あるいはきめる，という意味において，規約的定義とよばれてよいであろう．定義が規約的であるということは，それが恣意的であるということではない（'⟷' のかたちをした記号を選んだのは，ある意味では恣意的に選んだのではあるが）．なるほど，Pであるときまたそのときに限ってQであるという命題によって実際に理解されることは，PならばQでありそしてQならばPであるということである，と論ずることによって，わたしは注意ぶかく定義がなされるための基礎を準備した．しかし形式的には，その定義は，ある記号がある仕方で理解されるべきことを，おおやけに示すものであるという意味において，規約的なものなのである．

練　習　問　題

1　*Df.* ⟷を，第２，第３節の導出規則とともに用いて，つぎの連式に対する証明を見出せ．

(*a*)　$Q,\ P \longleftrightarrow Q \vdash P$

(*b*)　$P \rightarrow Q,\ Q \rightarrow P \vdash P \longleftrightarrow Q$

(*c*)　$P \longleftrightarrow Q \vdash -P \longleftrightarrow -Q$

(*d*)　$-P \longleftrightarrow -Q \vdash P \longleftrightarrow Q$

(*e*)　$(P \vee Q) \longleftrightarrow P \vdash Q \rightarrow P$

(*f*)　$P \longleftrightarrow -Q,\ Q \longleftrightarrow -R \vdash P \longleftrightarrow R$

2　「……であるときまたそのときに限って……」が「……ならば……」と「……そして……」によって定義されるように，「……でないならば……」は「……ならば……」と「でない」によって定義されうる．なぜならば，PでないならばQである（unless P then Q）と主張することは，PでないならばQである（if not P then Q）と主張することだからである（このことを特定の場合を例にとって根拠づけよ）．それ故，つぎのように規約しよう．

$$Df.\ *：\mathrm{A} * \mathrm{B} = -\mathrm{A} \rightarrow \mathrm{B}.$$

$Df.\ *$ を $Df.\longleftrightarrow$ と同様の仕方で用い，つぎの連式の証明を見出せ．

（a）　$P * Q \vdash Q * P$

（b）　$P * Q,\ P * R \vdash P * (Q \,\&\, R)$

（c）　$P * Q,\ R * -Q \vdash P * R$

（d）　$P * P \vdash P$

（e）　$-P * R,\ -Q * R,\ P \vee Q \vdash R$

第5節　その他の証明：諸規則の要約

幾つかのより程度の高い証明を示すことによって，われわれの導出規則の用法を例示しよう．証明される連式は，そこに用いられている演算記号の幾つかの基礎的な形式的特性を示しているので，それ自身研究に値する．そして形式的な作業もまた注意に値する．というのは，それは学生自身が証明を発見するための助けとして，習熟しておくべき技術を，実例によって示すことがしばしばあるからである．いろいろの証明のあとに，どういうところに注意すべきかを示す注を加えて，証明がどのようにして発見されるかを示すことにしよう．記憶しておいてよいことであるが，証明を発見するための確かな規則は存在しない．ヒントは与えられようが，実際にやってみることが何より大切なのである．（このために，学生は上の節の連式の証明をいま一度自分で発見することを試みていただきたい．）この節の終りには，参照に

便利なように，これまでに導入された規則の一覧表を加えておく．

29　$P \vdash P$

1　(1) P　A

これ以上に短かい連式は証明できないし，またその証明は可能な最も短かい証明である．しかしそれはくわしく注意するに値する．(1)の行は，(1)が与えられるならばPが導かれることを主張している．では(1)とは何であろうか——命題Pそのものである．すなわち，Pが与えられるならば，Pが結論できる．そしてこれが証明されるべき連式なのである．これは本当に健全な証明なのであろうか．PからPを推論することは，この論証が循環するという理由から，しばしば不健全であると考えられるが，しかしこれは誤解である．確かにこの論証は（通俗的な意味で）循環的である．しかし循環的論証というものは（大そう退屈ではあるが）まったく健全なのである．雨が降っているとするならば，ここから導くことのできる可能な最も安全な結論は，雨が降っているということである．ある命題をそれ自身から推論するならば，知識の上では進歩はないにしても，推論の上では誤まってはいない．この立場から言えば，仮定の規則はまさに循環的論証が健全であるという原理に基づいているのである．というのは，仮定の規則の主張するところは，ある命題が与えられたとき，少なくともその命題を推論することはできるということなのだからである．

AとBを，連式A$\vdash$BとB$\vdash$Aがともに証明可能であるような2つの命題としよう．その場合，AとBは相互導出可能（interderivable）であると言い，この事実を，そのことを示す記号を用いて，つぎのように書く．

$$\mathrm{A} \dashv\vdash \mathrm{B}.$$

たとえば，連式13と16（第3節）を比較してみれば，$(P \& Q) \to R$と$P \to (Q \to R)$とは相互に導出可能であることがわかる．従ってこれを要約してつぎのように書いてよい．

30　$(P \& Q) \to R \dashv\vdash P \to (Q \to R)$

相互導出可能性をもった結果を証明する場合には，導出は当然2つの部分にわかれる．たとえば，

31　$P\&(P \vee Q) \dashv\vdash P$

（*a*）$P\&(P \vee Q) \vdash P$

1	(1)	$P\&(P \vee Q)$	A
1	(2)	P	1 &E

（*b*）$P \vdash P\&(P \vee Q)$

1	(1)	P	A
1	(2)	$P \vee Q$	1 vI
1	(3)	$P\&(P \vee Q)$	1, 2 &I

$P\&(P \vee Q)$ がPから導かれることを証明する場合には（31(*b*)），各連言項が別個に導かれることを証明する．すなわち，PがPから導かれることは，実際，(1)において示されている通りである（上の29およびそのあとの注解を参照）．

32　$P \vee (P\&Q) \dashv\vdash P$

（*a*）$P \vee (P\&Q) \vdash P$

1	(1)	$P \vee (P\&Q)$	A
2	(2)	P	A
3	(3)	$P\&Q$	A
3	(4)	P	3 &E
1	(5)	P	1, 2, 2, 3, 4 vE

（*b*）$P \vdash P \vee (P\&Q)$

1	(1)	P	A
1	(2)	$P \vee (P\&Q)$	1 vI

32(*a*)において，Pが選言$P \vee (P\&Q)$から導かれることを示すには，vEを適用するため，Pが各選言項から順次導かれることを示す必要がある．PがPから導かれることは(2)の行で示され（ふたたび29を参照），Pが$P\&Q$か

ら導かれることは，&E によって(4)の行において証明される．このことから，(5)の行では右側に，‘2’が二度挙げられている理由がわかるであろう．第1の‘2’は，(2)の行で第1の選言項Pが仮定されていることを意味し，第2の‘2’は，同じ行で結論Pがその仮定から導出されたことを意味する．

33　$P \vee P \dashv\vdash P$

(a)　$P \vee P \vdash P$

1	(1)	$P \vee P$	A
2	(2)	P	A
1	(3)	P	1, 2, 2, 2, 2 vE

(b)　$P \vdash P \vee P$

1	(1)	P	A
1	(2)	$P \vee P$	1 vI

33(a)の(3)の行は，vE の使用の極限的な場合を示している．Pを$P \vee P$から導出するためには，Pが各選言項から順次導かれることを示す必要がある．しかるにそれらの選言項は同じもの，すなわちPそのものである．従ってすべてが(2)の行によって行なわれる．故に(3)の行の右側には，‘2’が4つ挙げられている．

34　P，$-(P \& Q) \vdash -Q$

1	(1)	P	A
2	(2)	$-(P \& Q)$	A
3	(3)	Q	A
1, 3	(4)	$P \& Q$	1, 3 &I
1, 2, 3	(5)	$(P \& Q) \& -(P \& Q)$	2, 4 &I
1, 2	(6)	$-Q$	3, 5 RAA

$-Q$を導出するために，われわれは間接的に進んで行き，そしてQを仮定して矛盾を導こうとするのである．この目標は(5)においてはたされる．そこから RAA によって求める連式が導かれる．34に結びつく推論の原理は，肯定

否定式（*modus ponendo tollens*）という中世の名前をもっている．Pが真であり，またPそしてQが真でないならば，Qは真でない．

35　$P \to Q \dashv\vdash -(P \& -Q)$

（a）$P \to Q \vdash -(P \& -Q)$

1	(1)	$P \to Q$	A
2	(2)	$P \& -Q$	A
2	(3)	P	2 &E
2	(4)	$-Q$	2 &E
1, 2	(5)	Q	1, 3 MPP
1, 2	(6)	$Q \& -Q$	4, 5 &I
1	(7)	$-(P \& -Q)$	2, 6 RAA

（b）$-(P \& -Q) \vdash P \to Q$

1	(1)	$-(P \& -Q)$	A
2	(2)	P	A
3	(3)	$-Q$	A
2, 3	(4)	$P \& -Q$	2, 3 &I
1, 2, 3	(5)	$(P \& -Q) \& -(P \& -Q)$	1, 4 &I
1, 2	(6)	$--Q$	3, 5 RAA
1, 2	(7)	Q	6 DN
1	(8)	$P \to Q$	2, 7 CP

35（a）はいまひとつの間接的証明である――$P \& -Q$を仮定し（(2)の行），矛盾を導くことをめざす．(3)と(4)の行は，(2)の行に言われていることを &E によって取り出したものであり，求める矛盾はほとんど直ちにえられる（(6)の行）．35（b）はもう少し複雑である．$P \to Q$の導出をめざしてPを仮定し（(2)の行），Qを導くことを補助的目標とし，最終の段階で CP によって求める結果をうる．(1)と(2)から直接にQを導出する方法はないと思われるので，われわれは$-Q$を仮定し（(3)の行），矛盾を導くことをめざすのである．(5)の

行において証明された通り，&Iによって，仮定(2)と(3)は仮定(1)に矛盾する．このことから，RAAによって－－Qが(1)と(2)から導かれる．従ってQがDNによって導かれる（(7)の行）．

36　$P \vee Q \dashv\vdash -(-P \& -Q)$

（a）$P \vee Q \vdash -(-P \& -Q)$

1	(1)	$P \vee Q$	A
2	(2)	$-P \& -Q$	A
3	(3)	P	A
2	(4)	$-P$	2 &E
2, 3	(5)	$P \& -P$	3, 4 &I
3	(6)	$-(-P \& -Q)$	2, 5 RAA
7	(7)	Q	A
2	(8)	$-Q$	2 &E
2, 7	(9)	$Q \& -Q$	7, 8 &I
7	(10)	$-(-P \& -Q)$	2, 9 RAA
1	(11)	$-(-P \& -Q)$	1, 3, 6, 7, 10 vE

（b）$-(-P \& -Q) \vdash P \vee Q$

1	(1)	$-(-P \& -Q)$	A
2	(2)	$-(P \vee Q)$	A
3	(3)	P	A
3	(4)	$P \vee Q$	3 vI
2, 3	(5)	$(P \vee Q) \& -(P \vee Q)$	2, 4 &I
2	(6)	$-P$	3, 5 RAA
7	(7)	Q	A
7	(8)	$P \vee Q$	7 vI
2, 7	(9)	$(P \vee Q) \& -(P \vee Q)$	2, 8 &I
2	(10)	$-Q$	7, 9 RAA

2	(11)	$-P\&-Q$	6, 10 &I
1, 2	(12)	$(-P\&-Q)\&-(-P\&-Q)$	1, 11 &I
1	(13)	$--(P \vee Q)$	2, 12 RAA
1	(14)	$P \vee Q$	13 DN

36(a)も36(b)もともに教えるところの多い証明であり，くわしく調べてみる価値がある．36(a)の基本的な考え方は，vE による証明である．選言のかたちをした仮定があるので，その第1の選言項を仮定し（(3)の行），結論を導くことをめざし，また第2の選言項を仮定し（(7)の行），同じ結論を導くことをめざす．いずれの場合にも，結論は RAA によって導かれる．そこで，その否定が求められている $-P\&-Q$ をただ1回仮定する((2)の行)．(3)―(6)で第1の目標ははたされ，(7)―(10)で第2の目標がはたされる．36(b)の基本的な考え方は，RAA による証明である．われわれは求める結論の否定を仮定し（(2)の行)，矛盾を導くことをめざす．仮定(1)に矛盾するものは，$-P\&-Q$ であることは明らかであるから，$-P$ と $-Q$ をそれぞれ別個に(2)から導出することがめざされる．$-P$ を導出するには，P を仮定し((3)の行)，矛盾を導く((5)の行)．よって $-P$ が(2)から導かれる（(6)の行)．同様に，$-Q$ もまた(2)から導かれる((10)の行)．こうして求める矛盾が(12)においてえられる．なおこの証明の(11)の行で，$-(P \vee Q) \vdash -P\&-Q$ という連式が実際に証明されていることは注意するに足る（この節の終りの練習問題1(f)を参照)．

これまでに用いてきた10個の規則によって，われわれは文に作用して文を形成する演算記号相互の間の関係についての，興味ある，またある場合には自明とは言えないような，結果を証明することが可能になる．しかるにそれらの規則はすべて，よく考えてみると，推論の健全で明白な原理に対応するものとして，われわれが受けいれたいと思うような規則なのである．少なくともわれわれは，それらの規則によって，真なる前提から偽なる結論へと導かれることはないであろう．もはや明らかでなければならないことであるが，

論証に適切な体系的形式を与えることについての，これまでにえられた洞察は，主として，特殊な論理的記法と，その適用を機械的にチェックすることができるような規則とを採用したことからくるものである．実際，われわれが導く結論に疑問をもつひとがあるならば，われわれはその証明を提示して，かれがどの段階を不妥当であるとみなすのか，またそれはなぜかを，正確に述べてもらいたいと言うことができる．この点において，状況は算術のそれに似ている．すなわち，ある計算にただ同意しないというだけではだめなのである．同意しないのなら，どこが間違っているのか，またなぜそれを間違いであると考えるのかが言われねばならないのである．証明の任意の行において誤りが犯されているかどうかは，その行とそれを正当化するとされる規則とを突き合わせてみるだけで，機械的に決定されうる．

導出規則の要約

1　仮定の規則　*Rule of Assumptions* (A)

任意の仮定を，証明の任意の段階において導入してよい．左側にその行の番号を書く．

2　肯定肯定式　*Modus Ponendo Ponens* (MPP)

AとA→Bが与えられたならば，Bを結論として導出してよい．Bは，AまたはA→Bが依存するすべての仮定に依存する．

3　否定否定式　*Modus Tollendo Tollens* (MTT)

－BとA→Bが与えられたならば，－Aを結論として導出してよい．－Aは，－BまたはA→Bが依存するすべての仮定に依存する．

4　二重否定　*Double Negation* (DN)

Aが与えられたならば，－－Aを結論として導出してよい．また逆も成り立つ．いずれの場合にも，結論は，前提が依存するのと同じ仮定に依存する．

5　条件的証明　*Conditional Proof* (CP)

Ａを仮定してＢの証明が与えられたならば，Ａ→Ｂを，Ａ以外の仮定（もしあるならば）に基づく結論として導出してよい．

6　&-導入　*&-Introduction* (&I)

ＡとＢが与えられたならば，Ａ＆Ｂを結論として導出してよい．Ａ＆Ｂは，ＡまたはＢが依存するすべての仮定に依存する．

7　&-除去　*&-Elimination* (&E)

Ａ＆Ｂが与えられたならば，ＡまたはＢを個別的に導出してよい．いずれの場合にも結論は前提が依存するのと同じ仮定に依存する．

8　v-導入　v-*Introduction* (vI)

ＡまたはＢが個別的に与えられたならば，ＡｖＢを結論として導出してよい．いずれの場合にも，結論は前提が依存するのと同じ仮定に依存する．

9　v-除去　v-*Elimination* (vE)

ＡｖＢが与えられ，同時に，Ａを仮定してＣが証明され，またＢを仮定してＣが証明されるならば，Ｃを結論として導出してよい．Ｃは，ＡｖＢが依存するすべての仮定，あるいはＣがＡから導出されるときに依存する（Ａ以外の）すべての仮定，あるいはＣがＢから導出されるときに依存する（Ｂ以外の）すべての仮定に，依存する．

10　背理法　*Reductio ad Absurdum* (RAA)

Ａを仮定してＢ＆－Ｂが証明されるならば，－Ａを結論として，Ａ以外の仮定（もしあるならば）から導出してよい．

注　相互条件法の記号‘⟷’はつぎの定義によって導入される．

$$Df. \longleftrightarrow : A \longleftrightarrow B = (A \to B) \& (B \to A)$$

この定義は，結論のなかに現われるＡ⟷Ｂを（Ａ→Ｂ)＆(Ｂ→Ａ）によって置き換えることを許し，またその逆も成り立つ．

練　習　問　題

1　つぎの連式に対して証明を与えよ．

(*a*)　$P \vee Q \vdash P \vee Q$

(*b*)　$P \& P \dashv\vdash P$

(*c*)　$P \& (Q \vee R) \dashv\vdash (P \& Q) \vee (P \& R)$

(*d*)　$P \vee (Q \& R) \dashv\vdash (P \vee Q) \& (P \vee R)$

(*e*)　$P \& Q \dashv\vdash -(P \to -Q)$

(*f*)　$-(P \vee Q) \dashv\vdash -P \& -Q$

(*g*)　$-(P \& Q) \dashv\vdash -P \vee -Q$

(*h*)　$P \& Q \dashv\vdash -(-P \vee -Q)$

(*i*)　$P \to Q \vdash -P \vee Q$

(*j*)　$-P \to Q \vdash P \vee Q$

第2章　命題計算　2

序　　論

前章では，形式的言語と言われるであろうようなものを徐々に学んだ．それは，初等数学の言語が，ある数値演算（加え算，引き算など）の研究のために設計されているのと幾らか似た仕方で，ある論証のパターンの研究のために設計された言語である．この言語はしばしば，命題計算（propositional calculus)（ときにはまた文計算（sentential calculus)）とよばれるが，その理由は言うまでもなかろう．この章においては，それがどのような特性をもち，力をもっているかについて，より明瞭な洞察をうるために，より理論的な水準でそれを研究する．われわれが取り上げるであろう諸問題のなかには，つぎの3つが含まれる．(i)数学においては，ひとたび証明された結果は，新しい結果をうるに当たって，ふたたび証明されることなしに利用されるのがつねである．ユークリッド幾何学を学ぶ者なら誰でも知っている通り，数学はこの意味において前進的である．われわれが，既に証明された連式を，他の連式の証明を発見することを容易ならしめるために，用いることができるような，何か類似の方法があるであろうか．この問いに対しては，第2節で肯定的に答えられる．(ii)われわれの導出規則は安全であるということに，直観的な根拠からどれほど確信があるにせよ，それでもやはり，それらの規則からは事実として不妥当な連式が導かれないことを示し，それらが安全であることを示す方法があるであろうか．ひとつの方法が，第3節および第4節において見出される．(iii)われわれはこれまでに，この言語の記号を操作するための10個の導出規則を導入した．それでは，これだけの規則で十分なのであ

ろうか．それともさらに多くの規則が必要なのであろうか．第5節では，われわれの規則がある意味において完全な組をなしており，それ以上の規則は不要であることが示される．これらの，またこれらに関連のある諸問題に解答を与えることから，命題計算の本性に対する理解を深めることができるであろう．

第1節　形成規則

上に述べた通り，命題計算は一種の言語であり，そういうものとして，それには文法，あるいはより限定して言えば，シンタックス（syntax）がある．これまでのやや安易な研究法においては，このシンタックスは当然のこととして仮定されてきた．しかし，もっとさきへ進もうとするならば，言語そのものの構造についてのさらに行き届いた説明が与えられねばならない．とりわけ，記号的に表現された文ということによって何が理解されるかは，わかりきったこととされてきた．しかるにこの概念を正確に示すことは，論理学者としてのわれわれの仕事の一部なのである．そこで，かなり長い一連の定義を導入することによって，この節をその仕事にあてるであろう．

第1に，括弧を定義する．括弧とはつぎの符号のひとつである．

‘(’，‘)’，

第1の種類の符号を左括弧とよび，第2を右括弧とよぶ．この，直ちに理解されるであろう定義は，直示的定義（ostensive definition）である．そう言われるわけは，他の語を用いて括弧を定義するよりはむしろ，括弧とはどんなものであるかを示す，あるいは見せる，からである．（直示的定義を避けることはできるであろう．括弧とは，一方の末端の点が他方の末端の点の真上にある円弧である，と言ってもよいであろう．）

第2に，論理的結合記号（logical connective）を定義するが，これは単に結合記号とよばれることも多い．論理的結合記号はつぎの符号のひとつである．

'→', '−', '&', 'v', '⟷'.

これもまた直示的定義であって，前の章において，文に作用して文を形成する演算記号として用いられた記号を，形式的に導入するものである．

第3に，（命題）変数（(propositional) variable）を定義する．命題変数はつぎの符号のひとつである．

'P', 'Q', 'R',……

これもまた直示的定義であるが，上の2つとは重要な点において異なっている．括弧とよばれるただ2種類の符号があり，結合記号とよばれるただ5種類の符号がある．しかし変数の定義のなかの'…'の示そうとしていることは，無限に多くの異なった変数が存在するということである．人間の力には限りがあるから，有限個の変数しか列挙する余裕も時間もない．だから'…'を加えるのである．実際上は4つ以上の異なった変数を必要とすることは稀れなので，このリストがどのように続いて行くであろうかを明記する必要はない．しかし理論的には変数の個数には上限はなく，もし新しい変数が必要ならば，それを構成することができる（たとえばダッシュをつけて，'P'''，'R'''' などをわれわれのリストに導入することによって），ということを覚えておけばよい．

第4に，（命題計算の）記号を定義して，括弧または論理的結合記号または命題変数であるとする．従って，上の符号はいずれも記号である．

第5に，（命題計算の）式（formula）を，記号の任意の列（sequence）であると定義する．この定義はすこし説明を必要とする．それによれば，

(1)　'P((−&Q⟷'

(2)　'(P v −P)'

は，両方とも記号の列であるから，いずれも式である．たとえば(2)は，左括弧とそのあとにくる変数Pとそのあとにくる結合記号'v'とそのあとにくる結合記号'−'とそのあとに再度現われるPとそのあとにくる右括弧とからなる列である．しかし，

(3) ‘v　　　P’

&

→

(→　R

)

は式ではない．それは記号の列ではなく，むしろ記号の寄せ集めだからである．列は順序を必要とし，(1)と(2)にはそれがあるが，(3)には欠けている．記号の列を書くための普通の規約は，記号を左から右への順序に従って，あまり離さないように配置する，ということである．これは現代ヨーロッパ語的な規約であるから，読者は，わたしが本書においてこれに従っているのを見てほっとした気持がするであろう．

式のクラス全体のうち，上の(1)のようなものは，漠然と，意味がないとかわけがわからないとか言われるが，一方(2)のようなものは，意味がわかり理解可能である．言うまでもなく，われわれが形式的な仕事において用いたいと思うのは，第 2 の部類の式だけであり，従ってそういう式を，できるなら，正確な定義によって選び出す必要がある．それ故，式の全体のなかから，7 項目からなる幾らか複雑な定義によって，論理式 (well-formed formula) の部分クラスを定義するのである．紙面を節約するために，これよりのちは「論理式」を ‘wff’（複数は ‘wffs’）と略記する．

(*a*)　任意の命題変数は wff である．

(*b*)　‘−’ が前におかれた任意の wff は wff である．

(*c*)　任意の wff のあとに‘→’がおかれ，そのあとに任意の wff がおかれ，全体を括弧にいれたものは wff である．

(*d*)　(*c*)と同様にして，‘→’を‘&’によって置き換えたものは wff である．

(*e*)　(*c*)と同様にして，‘→’を‘v’によって置き換えたものは wff である．

(*f*)　(*c*)と同様にして，'→'を'⟷'によって置き換えたものは wff である．

(*g*)　ある式が(*a*)−(*f*)の項目によって wff でないならば，それは wff ではない．

これらの項目が実際に wff をうまく定義していることを知る最善の方法は，例を考えてみることである．

(4)　'(((*P*→*Q*) v −*Q*)⟷(−−*P*&*Q*))'

が定義に照らして，望み通りに，wff であることを示そう．第1に項目(*a*)によって，

'*P*'，'*Q*'

は wffs である．なぜなら，(*a*)によれば，すべての変数は wffs だからである．(*b*)によって，wff の前に'−'をおいた結果は wff となる．従ってつぎのものは wffs である．

'−*P*'，'−*Q*'．

しかるに，われわれが示した通り，'−*P*'が wff であるならば，項目(*b*)によって

'−−*P*'

もまた wff である．((*b*)をつぎつぎに適用して，'−−−*P*'，'−−−−−*P*'などがすべて wffs であることを示すことができるであろう．) さて，'−−*P*'と'*Q*'は wffs であることが示されたから，項目(*d*)によって，それらの間に'&'をおき，全体を括弧にいれた結果は，さらにまた wff となる．故につぎのものは wff である．

(5)　'(−−*P*&*Q*)'．

また'*P*'と'*Q*'は wffs であるから，(*c*)によってつぎのものは wff である．

'(*P*→*Q*)'．

'(*P*→*Q*)'と'−*Q*'が wffs であるならば，(*e*)を用いて，つぎのものが wff であるという結果がえられる．

(6)　'$((P \rightarrow Q) \vee -Q)$'.

最後に，(6)と(5)が wffs であるならば，(f)を用いて，(4)そのものが wff であることがわかる．なぜならば，(4)は，(6)を書き，そのあとに'$\longleftrightarrow$'を，そのあとに(5)を書き，全体を括弧にいれた結果だからである．われわれの定義によって，最小部分（変数）から出発して，(6)のような複雑な式が論理式であることを，一歩一歩，示すことが可能となったのである．この例を注意ぶかく研究するならば，どのようにしてその技術を一般的に適用することができるかが明らかになるであろう．

他方，(a)から(f)までの項目をどのように適用してみても，上の(1)——「わけのわからない」例——が wff であることを示しえないであろうことは明らかである（もっともこれを証明するのはそれほど容易ではないが）．故に，定義のなかの，wff でないものを排除する項目，つまり一番最後に出てくる項目，(g)によって，(1)は wff ではないことになる．項目(a)—(g)を合わせたものは，式の全体を2つの部類にわける力をもっている．項目(a)－(f)によってえられ，定義によって wffs である式と，そのようにしてえられず，定義の(g)によって wffs ではない式とである．

この定義の重要な側面は，項目(c)－(f)において，式をかこむ括弧を導入すべきだと主張していることである．括弧を省略すると式が多義的になるから，このような主張が必要になる．たとえば，われわれは式'$P \& Q \rightarrow R$'が論理式であるとは認めたくない．なぜならば，この式はそのままでは，'$P \& (Q \rightarrow R)$'（第2の連言項が条件法であるような連言を表わす），または'$((P \& Q) \rightarrow R)$'（前件が連言であるような条件法を表わす），を意味しうるからである．括弧を挿入することを強調するのは，この種の危険をなくするためである．（他方，項目(b)においては，そのような括弧の挿入を必要としない．なぜその必要がないのか，学生は考えてみると有益であろう．）

しかしながら，幾つかの点で，wff の定義によって課せられる，式を括弧にいれるという規約は，理論的には正しいにしても，実際的には厄介なもの

である．事実，これらの規約の結果として，第1章で示された式の大多数は，不幸にして論理式ではなくなる．それらには，欠くことのできない外側の括弧がなかったのであった．そこでは，たとえば，‘$-P\rightarrow Q$’を受けいれたが，項目(c)によれば，‘$(-P\rightarrow Q)$’とする必要がある．しかし，正確さに欠けるところはあるにしても，われわれの直観は健全であった．つまり，むやみに括弧が多くなることは我慢ができないのである．採用してよい自然で実際的な規約は，最も外側の括弧を省略するのを許すことである．そしていまひとつの，括弧を減らす有用で実際的な方法がある．

結合記号に一定の順序でランクをつけることにしよう．すなわち，‘$-$’は‘&’または‘v’よりも「より強く結合する」．‘&’と‘v’は‘→’よりも「より強く結合する」．そして‘→’は‘⟷’よりも「より強く結合する」，ということにしよう．こうして，さきの規約によっては外側の括弧を除き，いまの規約によっては内側の括弧を除いて，‘$((P\,\&\,Q)\rightarrow R)$’のかわりに，実用上は‘$P\,\&\,Q\rightarrow R$’と書いても差しつかえないのである．‘&’は‘→’よりもより強く結合するので，‘$P\,\&\,Q\rightarrow R$’の‘Q’を，‘$Q\rightarrow R$’の前件として残すよりはむしろ，第2の連言項として取り込むのである．第1の解釈のようにしたいならば，‘$P\,\&\,(Q\rightarrow R)$’と書く必要がある．これらの規約を用いて，(4)を，多義的になることなしに，前よりも括弧のすくないかたちで，つぎのように書くことができる．

(7)　‘$(P\rightarrow Q)\,\mathrm{v}\,-Q\longleftrightarrow --P\,\&\,Q$’.

このように書く場合には，一対の括弧しか必要でない．（これに関連して，学生は，$--(P\,\&\,Q)$，すなわちPとQの連言の2重否定と，$--P\,\&\,Q$，すなわちPの2重否定とQとの連言の相違に注意すべきである．）

以上の規約が今後採用されるであろう．しかしそれらは，直観的な理解を助けるための実用的な規約であって，理論上の考案ではないことが強調されねばならない．理論上は，wff は上に定義された通りであり，外側の括弧と内側の幾対かの括弧をつけて，完全な wff ができるのである．

これまでのところでは，命題計算の基本的シンタックスがどのようなものであるかを述べてきた．wff について与えられた定義は，記号的に表現された文という，従来は漠然としていた概念によって何を理解すべきかについての，正確な説明として読むことができる．またその定義の項目(a)－(f)は，しばしば命題計算の形成規則 (formation rules)――その言語の，正しく形成された表現は，どのようなものであるかを定める規則――とよばれるものを与えるものとして読むことができる．

しかしほかにも，のちに重要となり，いま定義しておくのが有益なシンタックス的概念がある．これらの第1のものは，結合記号の作用範囲 (scope) の概念である．大ざっぱに言うと，ある式のなかの結合記号の作用範囲とは，結合記号そのものと，（理論上は）式を囲んでいる括弧を含めて，その結合記号によって連結されている式のことである．たとえば，(4)の‘&’の作用範囲は，‘$(--P\&Q)$’という wff であり，(4)の‘$\longleftrightarrow$’の作用範囲は，(4)という wff そのものである．すなわち，一般に，任意の結合記号の作用範囲は wff である．より厳密には，ある wff のなかに現われる結合記号の作用範囲が定義される必要がある．(4)においては，‘－’が3回現われている．（左から右へ読んで）第1番目に現われる‘－’の作用範囲は，‘$-Q$’であり，第2番目のそれの作用範囲は，‘$--P$’であり，そして第3番目のそれの作用範囲は，‘$-P$’である．作用範囲とは，現われるひとつびとつの結合記号の作用が及ぶもののことである．作用範囲の正確な定義はつぎのようになる．ある wff のなかに現われる結合記号の作用範囲とは，その記号の現われる個所を含む最短の wff のことである．たとえば，(4)における（ただ1回現われる）‘v’を考えてみよう．これは(4)のなかで，つぎの式に現われる．

(i)　‘$)\vee-$’

(ii)　‘$\rightarrow Q)\vee-Q)$’

(iii)　‘$((P\rightarrow Q)\vee-Q)$’

(iv)　‘$(((P\rightarrow Q)\vee-Q)\longleftrightarrow(--$’

'v' が現われ，しかも上述の項目(a)−(f)によって論理式でもあるような，最短の式は(iii)であり，これが実際にそこに現われている'v'の作用範囲なのである．作用範囲の定義がすこし奇妙に思われるとしても，その概念の直観的意味内容は明らかであろう．

作用範囲によって，第2の重要なシンタックス的概念，すなわち，ひとつの結合記号（の現われる個所）が，ある wff において，いまひとつの結合記号に従属する，という概念を定義することができるであろう．ひとつの結合記号（の現われる個所）の作用範囲が，いまひとつの結合記号の作用範囲のなかに含まれるならば，前者は後者に従属するという．たとえば，(4)において，'→' は 'v' に，'v' と '&' はともに '⟷' に，従属する．第1番目の'−'は'v'には従属するが，'→' には従属しない．第2番目の'−'は'&'には従属するが，'v' には従属しない．第3番目の'−'は，第2番目の'−'に従属し，従って'&'と'⟷'にも従属するが，'→'と'v'には従属しない．任意の wff において，自分自身以外のすべての結合記号の現われる個所がそれに従属することになる正確にひとつの結合記号が存在し，これが事実上最も広い作用範囲をもつ．これを主結合記号（main connective）とよぶが，その作用範囲は wff の全体である．たとえば，(4)においては，主結合記号は'⟷'であり，(2)と(6)においては，'v'である．

ある式が論理式であることを項目(b)−(f)を適用することによって証明するときは，従属する結合記号から，従属せしめる結合記号へと進む必要がある．たとえば，(4)が論理式であることを証明するときは，'$-P$' が論理式であることを証明したあとで，'$--P$'が論理式であることを証明し，そのあとで'$(--P\,\&\,Q)$'が論理式であることを証明する．以下同様――各段階において，さきに導入された結合記号を従属せしめる，すなわち，それ自身の作用範囲のなかに含む，結合記号が導入されるのである．この点から見ると，作用範囲ならびに従属関係の概念は，項目(a)−(f)と同様，wff の自然な構造がどうなっているかを示すのに役立つ手段である．

疑問の余地がなくなったwffの概念によって，われわれは連式表現(sequent-expression)（前章の意味における連式を表わす表現）を容易に定義することができる．前と同様 '⊢' を断定記号 (assertion-sign) とよぼう．そして A_1, A_2,……, A_n, B を任意の wffs の集合としよう．その場合には，

$$A_1,\ A_2, \cdots\cdots,\ A_n \vdash B$$

は連式表現である．換言すれば，任意の（有限）数の wffs を，それらの間にコンマをいれて書き，その右に断定記号を書き加え，そのあとに続けて任意の wff を書くならば，その結果は連式表現である．前章では，1から36までの番号の証明に対応して，少なくとも36個の連式表現が，妥当な連式を表現することが証明されている．

この最後の定義によって，論理学において非常に助けとなる方法が導入される．それは 'A_1', 'A_n', 'B' のような，メタ論理的変数 (metalogical variables) を用いる方法である．（それらは以前に第1章の第4節において，*Df.* ⟷を述べたときに出てきた．）'*P*', '*Q*' のような命題変数は，命題を値 (instances) としてとる．それは '*x*', '*y*' のような，代数学の数的変数が数を値としてとるようなものである．しかるにメタ論理的変数は，いまわれわれがしているように，記号自身について語ろうとするときに使用されるのである．それらは記号または記号の列を値としてとるからである．A_1, A_2,……, A_nを wffs の集合とすると言うとき，これは代数学において，x_1, x_2,, ……, x_n を数の集合とすると言うのと全く同様である．メタ論理的変数の有用性は，項目(*a*)−(*f*)を新しいかたちに言い換えることによって（これらの言い方は正確に以前の言い方と同じ意味をもつ），さらに具体的に示されるであろう．

(*a'*)　任意の命題変数は wff である．

(*b'*)　Aが wff ならば，−Aは wff である．

(*c'*)　AとBが wffs ならば，(A→B) は wff である．

(*d'*)　AとBが wffs ならば，(A & B) は wff である．

(*e'*)　AとBが wffs ならば，(A v B) は wff である．

(*f′*)　AとBが wffs ならば，(A⟷B) は wff である．

練 習 問 題

式を選び（たとえば第1章から），それらを wffs として書け．それぞれの場合に，それらが wffs であることを，wff の定義を用いて証明せよ．それぞれの結合記号（の現われる個所）の作用範囲を述べよ．また，主結合記号はどれかを述べ，またそれぞれの個所における結合記号の間にある従属関係を述べよ．

第2節　定理と導出された規則

いま述べられた命題計算のシンタックスによって，この章の序論において提起された第1の問題に取りかかることができるであろう．すなわち，既に証明された連式を利用して，他の連式の証明を短縮するために，どのような方法を発展させることができるであろうか．主な方法のひとつは，証明のなかへ定理を導入することである．従ってわれわれは定理とは何であるかを説明することからはじめよう．

第1章で指摘されたように，これまでに導入された10個の導出規則のうちの2つ――CP と RAA――は，証明のなかでそれが適用される結果として，左側にしるされた仮定の数がひとつだけ減るという特性をもつ．いまこれらの規則のひとつが適用されるに先立ち，ただひとつだけの仮定が左側に書かれてあるとしよう．するとこの規則を適用した結果として，左側には仮定がなくなる．こういうことが起こる可能性は，これらの規則の定式化にあたって許されていたのである．たとえば，前章の第5節で，AからのB&－Bの証明が与えられるならば，RAA は残りの仮定（もしあるならば）から，－Aを導出することを許す，と言われた．つぎに挙げるのは，この特徴をもつ証明の簡単な例である．

37　1　(1) $P \& -P$　　A

(2) $-(P\&-P)$　1,1 RAA

(1)の行で，矛盾$P\&-P$が仮定される（仮定の規則は，われわれが仮定したいものを仮定することをさまたげない）．故に，(1)の行においては，この矛盾が与えられる以上，矛盾が存在する，ということが主張されている．従ってRAAを適用して，いかなる仮定にも依存しないで，(1)の否定を導出することができる．その結果，(2)の行においては，左側には何も書かれない．

37の(2)の行で証明された連式は，簡単につぎのように述べてもよいであろう．

37　$\vdash -(P\&-P)$

(2)の行の左側には何も書かれていないのに対応して，ここでは断定記号の左側には wffs が書かれていない．このかたちで証明されうる連式の結論を，定理（theorem）とよぶのである．故に定理とは，仮定の数がゼロの証明可能な連式の結論である．断定記号を「故に」（‘therefore’）と読むかわりに――仮定をもつ連式の場合にはそう読むのが最も自然であるが――仮定のない証明可能な連式の場合には，「……は定理である」と読むのが自然であろう．たとえば，37は，Pそして$-P$は真ではない，は定理である，ということを述べているのである．たとえば，雨が降っておりそして雨が降っていないは真でない，は定理である．

興味のある定理の大ていのものは，事実上 CP を適用することによって導かれる．たとえば，

38　$\vdash P\rightarrow P$（連式29を参照）

1	(1)	P	A
	(2)	$P\rightarrow P$	1,1 CP

39　$\vdash P\rightarrow --P$

1	(1)	P	A
1	(2)	$--P$	1 DN
	(3)	$P\rightarrow --P$	1,2 CP

40　$\vdash --P \to P$

1	(1)	$--P$	A
1	(2)	P	1 DN
	(3)	$--P \to P$	1, 2 CP

41　$\vdash P \& Q \to P$（連式14を参照）

1	(1)	$P \& Q$	A
1	(2)	P	1 &E
	(3)	$P \& Q \to P$	1, 2 CP

38と41を29と14に比較するならば，前章において証明された任意の連式から，その証明に対して，1回またはそれ以上の，CP の適用される段階を付け加えるのみで，定理がえられることがわかる．たとえば，

42　$\vdash (P \to Q) \to (-Q \to -P)$

1	(1)	$P \to Q$	A
2	(2)	$-Q$	A
1, 2	(3)	$-P$	1, 2 MTT
1	(4)	$-Q \to -P$	2, 3 CP
	(5)	$(P \to Q) \to (-Q \to -P)$	1, 4 CP

この証明では，(1)—(4)は連式9，$P \to Q \vdash -Q \to -P$ と同じであり，(5)の行における CP の適用によって42の証明が完結する．同様に，連式4の証明に3回，CP の適用を加えるとつぎの定理がえられる．

43　$\vdash (P \to (Q \to R)) \to ((P \to Q) \to (P \to R))$

定理の重要性は，それが仮定をもたない結論として証明可能である故に，ただ論理的根拠のみに基づいて真であるような命題である，ということにある．このような真理はしばしば論理的真理 (logical truths) あるいは論理法則 (logical laws) とよばれ，論理学だけではなく，哲学においてもまた，重要な地位をしめている．これらの多くは特別の名前を与えられている．たとえば，37は矛盾律 (law of non-contradiction)，38は同一律 (law of identity)，39と

40はしばしば二重否定律（laws of double negation）とよばれる．38の例として，雨が降っているならば雨が降っている，という命題を考えることができるであろう．これは現実の気象の状態とは全く無関係に，純粋に論理的根拠のみに基づいて真なのである．

$P \to P$のような定理は，それに対応する$P \vdash P$のような，仮定をもった妥当な連式と比較対照されるべきであろう．後者が論証のわくぐみ，妥当な論証のパターンであるのに対して，前者は（論理的に）真なる命題である．「雨が降っている．故に雨が降っている」は論証を表わし，それについてわれわれが問いうるのは，妥当か否かということである．「雨が降っているならば，雨が降っている」は命題を表わし，それについてわれわれが問いうるのは，真か否かということである．論証と命題を混同することは，妥当性と真理性を混同すること——この書物のはじめにわたしが除去しようとした混同——に類似している．

さらにひとつ，排中律（law of excluded middle）とよばれる重要な定理があるが，これは形式が条件法ではないので，最後にCPを適用して証明する，ということはできない．

44　$\vdash P \vee -P$

1	(1)	$-(P \vee -P)$	A
2	(2)	P	A
2	(3)	$P \vee -P$	2 vI
1, 2	(4)	$(P \vee -P) \& -(P \vee -P)$	3, 1 &I
1	(5)	$-P$	2, 4 RAA
1	(6)	$P \vee -P$	5 vI
1	(7)	$(P \vee -P) \& -(P \vee -P)$	6, 1 &I
	(8)	$--(P \vee -P)$	1, 7 RAA
	(9)	$P \vee -P$	8 DN

(1)の行において，求める定理の否定を仮定し，矛盾を導くことをめざす．P

を仮定する（(2)の行）ことによって，(1)と(2)に基づいて矛盾が導かれ（(4)の行），その結果(1)は（(5)の行を）$-P$に導く．この$-P$は同じ矛盾へと導くが（(7)の行），しかしながらそれは，今度は(1)のみに基づいている．故にDNを用いて求める結果がえられる．(6)の行で，$P \vee -P$は，それ自身の否定である仮定に基づいていること——それが真でないならばそれは真であるということ——がわかるが，これは注意するに値する．このことは，前章の「驚くべき」結果，23，に幾らかの光を投ずるであろう．

排中律は，任意の命題に対して，それかまたはその否定が真であること——これはかなり明白に論理的真理であるが——を，実際にそのいずれであるかをきめることができるという意味で，主張するものである．それは，すべての命題は真または偽であるという法則と，密接な関係があり，この法則から排中律という名前もきているのである——どのような命題にも真と偽の間の第3の，あるいは中間の値はない．論理的には，雨が降っているかあるいは雨が降っていないかであって，第3の可能性はないことになる．公平を期するならば，この法則がすべての場合にあてはまるかどうかは疑われうるし，また疑われてきたと言わねばならないであろう．たとえば，君が細君を打つことをやめたかやめていないかである，ということは真であろうか．

いま与えられた証明は，定理$P \vee -P$の証明である．しかしながら，われわれは$Q \vee -Q$を証明したかったのだと仮定しよう．少し考えてみれば納得できることであるが，与えられた証明のなかに現われる‘P’を，それぞれ組織的に‘Q’に変えるならば，その結果はこの新しい定理の，同様に健全な証明となるであろう．また，証明したかったのは$(Q \rightarrow R) \vee -(Q \rightarrow R)$であったとしよう．もう少し考えてみれば納得できることであるが，証明の全体にわたって，同様に‘P’を‘$Q \rightarrow R$’に変えるならば，その結果えられる証明は新しい定理の証明の役割をはたすであろう．このような場合の考察からわかることは，ある定理を証明する場合に，われわれは，証明される定理に密接な関係のある他のいろいろの定理を，いま例を示したような種類の代入によ

って，陰的に (implicitly) 証明しているのだ，ということである．従って，これらの他の定理を別個に証明するのは無用の手間というものであろう——それは既に発見された証明と実質上重複するであろう．しかるにこのことは，今度は新しい結果をうるための近道があることを示す．

与えられた wff の代入例 (substitution-instance) をつぎのように定義することによって，問題はより明確にされうる．与えられた wff の代入例とは，与えられた wff のなかに現われる1つまたは1つ以上の変数を，wff の全体にわたって，何かの他の wffs によって置き換えることによって，もとの wff から結果する wff のことである．ただし，そのようにして置き換えられる変数は，それぞれ同じ wff によって置き換えられるものと了解される．たとえば，‘$(Q\to R)\vee-(Q\to R)$’ は，この定義により，‘$P\vee-P$’ の代入例である．なぜならば，それは‘$P\vee-P$’のなかに現われる変数‘P’を，全体にわたって同じ wff ‘$(Q\to R)$’によって置き換えることによって，‘$P\vee-P$’ という wff から結果するからである．同様に，‘$Q\vee-Q$’ は‘$P\vee-P$’の代入例である．そしてこの場合には逆もまたそうである．

つぎに挙げるのはより複雑な場合である．つぎの wffs を考えてみよう．

(1)　$P\to Q\vee-(-P\,\&\,Q)$

(2)　$R\vee S\to P\vee-(-(R\vee S)\,\&\,P)$.

(2)は(1)のなかに2回現われる変数‘P’を‘$R\vee S$’で置き換え，また(1)のなかに2回現われる変数‘Q’を‘P’で置き換えることによって，(1)から結果するのであるから，(2)は(1)の代入例である．

容易にまたしばしば忘れられる，代入 (substitution) の2つの要点は，強調しておくに値する．第1に，代入は，代入が行なわれる各変数に対して，一様に——すなわち，全体にわたって——行なわれねばならない．言い換えると，代入例が結果するようにするには，与えられた変数が現われているすべての個所に，同じ wff が代入されねばならない．第2に，この代入が行なわれうるのは，ただ命題変数に対してのみであり，たとえば，否定された変

数に対しては代入は行なわれえない．たとえば，

(3)　$-S\rightarrow Q\vee-(S\,\&\,Q)$

は，定義によって，(1)の代入例ではない．しかるに，

(4)　$-S\rightarrow Q\vee-(--S\,\&\,Q)$

は(1)の代入例である．すなわち，(1)の‘P’を全体にわたって，‘$-S$’で置き換えると，(4)はえられるが(3)はえられない．故に，wff の代入例は，つねにもとの wff と少なくとも同じ長さであり，もとの wff のなかのどの結合記号も，代入例においてなくなることはない．漠然としてはいるがわかりきった意味で，代入例はもとのものと同じ一般的構造をもっている．

いまやわれわれは，定理の証明は，その定理のすべての（無限に多くの）可能な代入例の陰的な証明になっていると言うことができる．$P\rightarrow P$の証明（上の38）は，任意の wff Aについて，A→Aなる形式の，任意の定理を陰的に証明しているのであって，従って，$(-P\rightarrow Q)\rightarrow(-P\rightarrow Q)$，$R\vee S\rightarrow R\vee S$ などを陰的に証明しているのである．より正確に言うならば，いまAという wff が証明の存在する定理を表わし，BがAのなかに現われるある変数であるとしよう．Aの証明の全体にわたって，Bをある他の wff Cによって置き換えるならば，Aという wff の全体にわたって，BをCによって置き換えた結果えられるAの代入例の，新しい証明がえられる．そしてそのことは，Aのなかの１つ以上の変数への代入に，直ちに拡張されうる．新しい証明が実際に証明であるということ――代入が行なわれたあとも，規則の適用はすべて正しい適用であるということ――は，用いられている規則そのものを点検すれば知られる．というのは，規則は，証明に含まれている wffs の一般的構造のみに関わるもので，この構造は代入によって影響をこうむらないからである．われわれのえた結果はつぎのかたちに要約される．

（S 1）　証明された定理の任意の代入例に対して，証明が見出されうる．

定理に関してえられたこの結果は，連式一般に拡張されうる．われわれは

連式表現の代入例をつぎのようなものとして定義してもよいであろう．すなわちそれは，与えられた連式表現の全体にわたって，その連式表現のなかのある wff に現われる，1つあるいはそれ以上の変数を，ある他の wffs によって置き換えることによって，もとの連式表現から結果するような，任意の連式表現である．ただし，そのように置き換えられる変数はそれぞれ，同じ wff によって置き換えられるものと了解される．（この定義は，連式表現がただ1つの wff を含むような極限的な場合には，実質的にさきに与えた定義となる．）たとえば，連式2は連式1の代入例であり，また

(5)　$P\rightarrow(Q\,\&\,R\rightarrow -S)$，$P$，$--S\vdash -(Q\,\&\,R)$

は，

(6)　$P\rightarrow(Q\rightarrow R)$，$P$，$-R\vdash -Q$

の‘Q’のかわりに‘$Q\,\&\,R$’を，‘R’のかわりに‘$-S$’を，式全体にわたって代入することによってえられる，(6)の代入例である．(6)が妥当な連式を表現していることは，証明6として証明された．いまや6の証明は，連式(5)をもまた陰的に証明していることが知られる．全く同様の推論によって，原理（S 1）の一般化がえられる．

（S 2）　証明された連式の任意の代入例に対して，証明が見出されうる．

そのような証明は，与えられた証明の全体にわたって適切な代入を組織的に行なうことによって実際にえられるのであって，その際，導出規則の適用はすべて，新しい証明のなかで正しい適用としてたもたれている．

原理（S 1）と（S 2）は，われわれが証明した結果がもっている重要な性質，すなわちその一般性を明らかにしている．最初に記号‘P’，‘Q’，‘R’等が日常言語の特定の文を表わすものとして導入された．これらの記号は，複合文の論理的形式——他の文によって共有される形式——を明らかにする助けになるという利点があった．いまやそれらは実際に，「変数」というラベルを付けられるに値することがわかる．というのは，Pに対して証明された定理

または連式は，命題計算の任意の命題に対して陰的に証明されているからであって，これはちょうど，代数学において，'x'を含む結果は，陰的に任意の数についての結果であるのと同じである．このようにして，われわれの結果は，特定の命題に対して述べられてはいるが，陰的には，われわれの記法で表現できる任意の命題に関わるもので，内容的にきわめて一般的である．

われわれは定理導入の規則（Rule of theorem introduction）〔TI〕によって，定理およびその代入例を，証明を短縮するために利用するようにしてもよいであろう．この規則は，証明の任意の段階で，既に証明された定理，あるいはそのような定理の代入例を導入することを許す．右側には，証明された定理の番号とともに，TI（または，代入例が含まれるならば TI(S)）と記入する．左側には，もちろん，数字は現われることはない．定理は仮定に依存しないからである．たとえば，

45　$P \vdash (P \& Q) \vee (P \& -Q)$

1	(1)	P	A
	(2)	$Q \vee -Q$	TI(S)44
3	(3)	Q	A
1, 3	(4)	$P \& Q$	1, 3 &I
1, 3	(5)	$(P \& Q) \vee (P \& -Q)$	4 vI
6	(6)	$-Q$	A
1, 6	(7)	$P \& -Q$	1, 6 &I
1, 6	(8)	$(P \& Q) \vee (P \& -Q)$	7 vI
1	(9)	$(P \& Q) \vee (P \& -Q)$	2, 3, 5, 6, 8 vE

Pを仮定したあと，44の排中律を，代入例のかたちで導入し（(2)の行），それから vE を用いて，この排中律の各選言項を順に仮定し（(3)と(6)），その各々から求める結論を導く（(5)と(8)）．(9)の行で vE を適用するとき，結論はPのみに基づく．なぜならば，(2)の行の選言は定理であって，いかなる仮定にも基づかないからである．

46　$P \to Q \vdash P \& Q \longleftrightarrow P$

1	(1)	$P \to Q$	A
	(2)	$P \& Q \to P$	TI 41
3	(3)	P	A
1, 3	(4)	Q	1, 3 MPP
1, 3	(5)	$P \& Q$	3, 4 &I
1	(6)	$P \to P \& Q$	3, 5 CP
1	(7)	$(P \& Q \to P) \& (P \to P \& Q)$	2, 6 &I
1	(8)	$P \& Q \longleftrightarrow P$	7 $Df. \longleftrightarrow$

相互条件法$P \& Q \longleftrightarrow P$をうるために，２つの条件法，$P \& Q \to P$と$P \to P \& Q$を別個に導出することをめざす．しかし第１の条件法は既に証明された定理41であるから，従って TI によって直接に導入する．27と46を合わせて，相互導出可能性を表わす結果がえられる．

47　$P \& Q \longleftrightarrow P \dashv\vdash P \to Q$.

規則 TI は新しい基本的導出規則ではない．それがない場合には，われわれの10個の基本的規則を適用することによっては証明できない連式を，それが証明可能にする，ということはない．それはたんに，既に証明された結果を用いて，より簡単に他の結果を証明することを可能にするだけである．たとえば，45の場合，44の証明の最初の８行に対応する，‘P’を‘Q’に置き換えた，８行によって与えられる証明を，45の証明の前に付加し，そして(1)から(9)までの番号を(9)から(17)に変えて，以前と同じように続けて行くことができるであろう．証明の右側の記入事項は，TI(S)44のかわりに 8DN となるであろう(44の(9)の行を参照)．こうしてわれわれの基本的規則からの，45の，長くはあるが完全な証明がえられるであろう．定理が TI によって導入されるときにはいつも，基本的規則からの定理の証明を，与えられた証明の前に付加することができ，こうしてその証明を，最初の基本的規則からのより長い証明に変形することができる．この場合に必要なのは，ある番号の付けか

えのみである．証明をはかどらせはするが，しかしわれわれの導出の能力を増すわけではないことが示されうる，このような性格の規則は，原始的規則(primitive rules) とよばれてもよい基本的な10個の規則と対照させて，導出された規則 (derived rules) とよばれる．

証明を短縮するために，定理をこのように利用する方法が知られたのであるから，既に証明された連式を，同じような目的に利用することを可能にする規則はないだろうかと考えるのは自然である．たとえば，ある仮定に基づいて$P \to Q$を証明したとしよう．すると連式9（$P \to Q \vdash -Q \to -P$）によって，$P \to Q$を証明したときと同じ仮定から，$-Q \to -P$を，特別の証明なしに，結論することができるであろう．また，いろいろの仮定から，$P \to Q$；$Q \to R$，Pが証明されたとしよう．すると連式3（$P \to Q$，$Q \to R$，$P \vdash R$）によって，これらのいろいろの仮定のプールされたものに基づいて，特別の証明なしに，Rを結論できるであろう．そしてこのことは，現実に証明された連式のみならず，それらの任意の代入例に対しても，（S 2）によって，適用されるであろう．

連式導入の規則 (Rule of sequent introduction)〔SI〕もまた，導出された規則であって原始的規則ではないが，これが上のことを可能にするのである．十分一般的にこの規則を述べ，また根拠づけることは少しく複雑になるが，その主要な機能は，例から明らかになるであろう．いろいろの仮定に基づく証明の結論として，A_1, A_2,………, A_n が与えられたと仮定し，また A_1, A_2, ………, $A_n \vdash$ B は既に証明された連式（の代入例）であるとしよう．すると SI は，A_1, A_2,………, A_n が依存する仮定のプールされたものに基づいて，B を結論として導くことを許す．SI はつぎのようにして根拠づけられるであろう．仮定（および，必要ならば，（S 2））によって，原始的規則のみを用いてつぎの証明がえられる．

(i)　A_1, A_2,………, $A_n \vdash$ B.

故に，この証明に加えて，CP を n 回適用することによって，つぎのものを

定理として証明することができる．

(ii)　$A_1 \to (A_2 \to (\cdots\cdots(A_n \to B)\cdots\cdots))$

（この条件法のかたちをした定理が上の連式に対応する仕方は，上の43の結論が4に対応する仕方と同じである．）故に，結論A_1, A_2,……, A_n とともに与えられた証明のなかへ，TI によって(ii)をいかなる仮定にも基づかない新しい行として導入することができる．そこで，与えられた条件法の前件である A_1, A_2,……, A_n を順次用いて，MPP を n 回継続して適用することによって，Bを結論として導くことができる．明らかに，A_1, A_2,……, A_n のすべてが依存しているどのような命題にも，これを仮定としてBは依存する．このことは，SI を用いた任意の証明が，原始的規則のみを用いた同じ連式の証明へ，どのようにして組織的に変形されうるかを示す――そこに含まれている TI の適用は，既にわれわれが知っているように，原始的規則によって除去されうるのであるが――という意味において，SI を根拠づけるのである．

48　$-P \vee Q \vdash P \to Q$

1	(1)	$-P \vee Q$	A
1	(2)	$-(--P \,\&\, -Q)$	1 SI(S) 36(a)
1	(3)	$--P \to Q$	2 SI(S) 35(b)
4	(4)	P	A
4	(5)	$--P$	4 DN
1, 4	(6)	Q	3, 5 MPP
1	(7)	$P \to Q$	4, 6 CP

36(a)の代入例は $-P \vee Q \vdash -(--P \,\&\, -Q)$ であり，35(b)の代入例は $-(--P \,\&\, -Q) \vdash --P \to Q$ である．SI によってこれらの2つの連式は，(1)から(2)，(2)から(3)を導くために用いられる．そのあとの証明は直ちにえられる．練習問題1.5.1(i)と48を合わせると，つぎの結果がえられる．

49　$P \to Q \dashv\vdash -P \vee Q$．

50　$P \vdash Q \to P$

1	(1)	P	A
1	(2)	$-Q \vee P$	1 vI
1	(3)	$Q \rightarrow P$	2 SI(S) 48

51　$-P \vdash P \rightarrow Q$

1	(1)	$-P$	A
1	(2)	$-P \vee Q$	1 vI
1	(3)	$P \rightarrow Q$	2 SI 48

52　$-P$，$P \vee Q \vdash Q$

1	(1)	$-P$	A
2	(2)	$P \vee Q$	A
3	(3)	P	A
1	(4)	$P \rightarrow Q$	1 SI 51
1,3	(5)	Q	3,4 MPP
6	(6)	Q	A
1,2	(7)	Q	2,3,5,6,6 vE

53　$-Q$，$P \vee Q \vdash P$

（証明は52と同様である）

54　$\vdash (P \rightarrow Q) \vee (Q \rightarrow P)$

	(1)	$P \vee -P$	TI 44
2	(2)	P	A
2	(3)	$Q \rightarrow P$	2 SI 50
2	(4)	$(P \rightarrow Q) \vee (Q \rightarrow P)$	3 vI
5	(5)	$-P$	A
5	(6)	$P \rightarrow Q$	5 SI 51
5	(7)	$(P \rightarrow Q) \vee (Q \rightarrow P)$	6 vI
	(8)	$(P \rightarrow Q) \vee (Q \rightarrow P)$	1,2,4,5,7 vE

ここに挙げた一連の結果は，興味ある特徴として，前進的な性格をもって

いる．48が証明されると，それは50と51を導くために用いられ，つぎにはこれらが52と54の証明に用いられた．TI および SI が，既に証明された定理と連式から，新しい定理と連式を生成するための強力な規則であることは，もはや明らかでなければならない．われわれの作業は，いまやユークリッド幾何学のような数学的理論のもっている前進的性格を備えるに到ったのである．

上の結果のうち，50および51は，しばしば質料的含意のパラドックス（paradoxes of material implication）とよばれる．そのパラドクシカルな趣きを見るには，まず50および51のなかのQが，任意の命題であってよく，Pとは内容的に無関係な命題であってよい，ということを含んでおいていただきたい．そこで50によって，ナポレオンがフランス人であったという事実から，月が青いならばナポレオンはフランス人であった，ということを結論できるのである．「質料的含意」という名前は，われわれの記号法においては‘$P \rightarrow Q$’で表現されるPとQの関係に対して，バートランド・ラッセルが与えたものである．われわれはこれを「PならばQ」と読んできたが，50および51から明らかなように，‘$\rightarrow$’はわれわれが日常的に「……ならば……」と結びつけはしないであろうような論理的特性をもっている．この喰い違いは，日常的には，「PならばQ」を真として受けいれようとするに先立って，PとQが思考の上で，あるいは内容的に，結びついていることが要求されるが，これに対して，50および51が示すように，‘$P \rightarrow Q$’を受けいれるには，このような要求は課せられない，という事実によるのである．このような喰い違いがあることは認められはするが，しかしながらわれわれは，「PならばQ」の翻訳として，推論の目的に役立つ‘$P \rightarrow Q$’をこれまで通り採用することにして，問題はないであろう．なぜならば，第4節で明らかになることであるが，われわれの規則には，少なくとも真なる仮定から偽なる結論へと導くことは決してないという性質があるからである．50および51の妥当性を認めたくない読者には，そのことが証明されるまで判断を保留するか，それとも証明のなかのどの段階を誤りとみなすのか，またどの導出規則を安全でないと考える

のか，そしてそれはなぜか，をきちんと示していただきたい．（自然な答えは，各証明の(2)の行の vI の適用が不健全だということである．しかし第1章第3節における vI の根拠づけを参照せよ．とにかく，50および51は，規則 A，&I，&E，RAA，DN，CP だけを用いて，いずれも9行で証明できる．これらの「独立の」証明を見出すことは勉強になる練習問題である．なぜならそれは，パラドックスを「のがれる」ことがいかに難かしいかを明らかにするからである．）それ故23とならんで，50および51を，原始的規則からの幾つかの驚くべき帰結として分類してもよいであろう．54は，それほど有名ではないパラドックスである．それは任意の命題PおよびQに対して，PならばQ，が真であるか，あるいはQならばP，が真であるかである，ということを論理的真理として主張するのである．雨が降っているならば雪が降っているか，あるいは雪が降っているならば雨が降っているか，である．

52と53に関連する推論の原理は，否定肯定式（*modus tollendo ponens*）という中世の名前をもっている．これはこれまでに言及した第4の中世の式(*modus*)であって，4つあるなかの最後のものだから，ここでそれらをまとめておくのが適当である．

(i)　肯定肯定式（*modus ponendo ponens*）とは，ある条件法が成り立ち，またその前件が成り立つならば，その後件が成り立つという原理である．

(ii)　否定否定式（*modus tollendo tollens*）とは，ある条件法が成り立ち，またその後件の否定が成り立つならば，その前件の否定が成り立つという原理である．

(iii)　肯定否定式（*modus ponendo tollens*）とは，ある連言の否定が成り立ち，またその連言項のひとつが成り立つならば，他方の連言項の否定が成り立つという原理である．

(iv)　否定肯定式（*modus tollendo ponens*）とは，ある選言が成り立ち，またその選言項のひとつの否定が成り立つならば，他方の選言項が成り立つという原理である．

(i)と(ii)はわれわれの原始的規則 MPP と MTT に表現されている．明らかに SI と52と53によって，否定肯定式に類似した，MTP とよんでよい規則が定式化されうる．しかしこれは，導出された規則であって，SI の特殊な場合に過ぎないであろう．それはつぎのように述べられる．選言とひとつの選言項の否定が与えられるならば，結論として他の選言項を導出することが許される．必要な場合には，この規則は実際に MTP として挙げられるであろう．同じように，SI と34と，たやすく証明される $Q, -(P \& Q) \vdash -P$ とによって，特殊な導出された規則として，MPT を定式化してもよいであろう．すなわち，ある連言の否定とその連言項のひとつが与えられるならば，結論として他方の連言項の否定を導出することが許される．

これらの式（*modi*）に関連して，最後に注意してよいことは，MTT は原始的規則と解される必要はなく，他の規則から導出される規則としてえられるということである．つまり，

55　$P \rightarrow Q,\ -Q \vdash -P$

1	(1)	$P \rightarrow Q$	A
2	(2)	$-Q$	A
3	(3)	P	A
1, 3	(4)	Q	1, 3 MPP
1, 2, 3	(5)	$Q \& -Q$	2, 4 &I
1, 2	(6)	$-P$	3, 5 RAA

われわれは MTT を用いないで55を証明する．SI に照らして，55は，導出された規則としての MTT を用いてえられることを，その通りに与えるために用いられうる．これは，原始的規則の数をできるだけ少なくしようとするならば――それは論理学のある研究領域においては，考慮すべき重要な問題であるが――興味ぶかいことであろう．

MTP および MPT の特殊な場合は別として，SI によって用いるのに，最もむくいられるところの多い連式は，いろいろのかたちで定式化されるド

・モルガン律 (de Morgan's law) とよばれるもの，すなわち，36および練習問題1.5.1(f)－(h)である．これらによって，否定された連言と選言を，否定されていない選言と連言に変形することができる．さらに記憶する価値があるのは，49（条件法を選言に変えることを可能にする），35（条件法を否定された連言に変えることを可能にする），練習問題1.5.1(e)（連言を否定された条件法に変えることを可能にする），練習問題1.5.1(c)および(d)（いわゆる分配律 (distributive laws)）である．しばしば，54の証明におけるごとく，44を導入して vE によって証明を進めることが助けになる．また同じ54の証明におけるごとく，パラドックス50および51を用いる手法をおぼえておくべきである．

練　習　問　題

1　10個の原始的規則のみを用いて，つぎの連式を証明せよ．

(a)　$\vdash (Q \rightarrow R) \rightarrow ((P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R))$

(b)　$\vdash P \rightarrow (Q \rightarrow P \,\&\, Q)$

(c)　$\vdash (P \rightarrow R) \rightarrow ((Q \rightarrow R) \rightarrow (P \vee Q \rightarrow R))$

(d)　$\vdash (P \rightarrow Q \,\&\, -Q) \rightarrow -P$

(e)　$\vdash (-P \rightarrow P) \rightarrow P$

2　つぎの連式は妥当な連式である．なぜならば，この書物のなかで既に証明された連式の代入例だからである．それぞれについて，それが代入例としてえられた，もとの証明された連式の番号を挙げ，またどのような代入が用いられたかを述べよ．

(a)　$(P \rightarrow Q) \rightarrow P,\ P \rightarrow Q \vdash P$

(b)　$--P \rightarrow ---P,\ ----P \vdash -P$

(c)　$-P \,\&\, (Q \,\&\, R) \rightarrow Q \vee P \vdash -P \rightarrow (Q \,\&\, R \rightarrow Q \vee P)$

(d)　$(-Q \rightarrow Q) \rightarrow -(-Q \rightarrow Q) \vdash -(-Q \rightarrow Q)$

(e)　$-(S \vee P) \vdash S \vee P \rightarrow (P \,\&\, Q \longleftrightarrow R \vee -S)$

3　原始的規則のみによって証明せよ.

(*a*)　$\vdash P \to P \vee Q$

この結果を用い，原始的規則と TI によって証明せよ.

(*b*)　$Q \to P \vdash P \vee Q \longleftrightarrow P$

練習問題1.4.1(*e*)に照らして，これからつぎのものがえられる.

(*c*)　$P \vee Q \longleftrightarrow P \dashv\vdash Q \to P$

4　原始的規則と SI を50とともに用いて証明せよ.

(*a*)　$P \& Q \dashv\vdash P \& (P \longleftrightarrow Q)$

5　原始的規則あるいは導出された規則を，既に証明されたどのような連式あるいは定理とでもともに用いて，証明せよ.

(*a*)　$\vdash P \vee (P \to Q)$

(*b*)　$\vdash (P \to Q) \vee (Q \to R)$

(*c*)　$\vdash ((P \to Q) \to P) \to P$

(*d*)　$-Q \vdash P \to (Q \to R)$

(*e*)　$P,\ -P \vdash Q$

(*f*)　$P \vee Q \dashv\vdash -P \to Q$　(cf. Ex. 1.5.1(*j*))

(*g*)　$-(P \to Q) \dashv\vdash P \& -Q$

(*h*)　$(P \to Q) \to Q \dashv\vdash P \vee Q$

(*i*)　$(P \to Q) \vee (P \to R) \dashv\vdash P \to Q \vee R$

(*j*)　$P \to Q \dashv\vdash (P \longleftrightarrow Q) \vee Q$

(*k*)　$Q \vdash P \& Q \longleftrightarrow P$

(*l*)　$-Q \vdash P \vee Q \longleftrightarrow P$

6　AとBを，命題計算の記法によって表現することのできる任意の命題とせよ.

(i)　$\vdash$ A$\to$Bが証明可能であるとき，またそのときに限って，A$\vdash$Bはわれわれの規則によって証明可能であることを示せ.

(ii)　$\vdash$ A$\longleftrightarrow$Bが証明可能であるとき，またそのときに限って，A$\dashv\vdash$Bは

証明可能であることを示せ.

7 実際上, われわれの規則 DN はつぎの 2 つの規則が結合したものである. (i)Aから－－Aを導出すること, そして(ii)－－AからAを導出すること. (i)は他の原始的規則から導出される規則としてえられることを示せ(規則 MTT, すなわち連式55, に対する, これに対応する証明を参照せよ).

第3節 真 理 表

前節ではこの章のはじめに提起された第1の問いに答えた. 他の2つの問い(われわれの導出規則は安全であるか, それらは完全であるか)に答える助けになるように, この節では全く新しい方法で, つまり真理表 (truth-tables) の技術によって, 命題計算を研究することにする. たまたまこの技術は, 連式の不妥当性を示す方法ともなるのであるが, これとは反対に導出規則は, ただ連式の妥当性を示すに過ぎないのである. 真理表は習熟しやすいものなので, この節でのわれわれの取り扱いは手早くやれるであろう.

真理表による方法は, wffs の値を求める方法である. wff の変数に (真理値とよばれる) 値を対応させ, そして与えられた表によってその wff 全体の値を計算するのである. これとよく似た, たとえばつぎのような代数的表現の値を求める数学的手続を思い出して, 比較してみると有益であろう.

(1) $(x+y)z-(y+z)(y+x)$.

x に10, y に3, z に5という値を与えると, 代入によってつぎの表現がえられる.

(2) $(10+3)5-(3+5)(3+10)$.

与えられた表によって計算すると,

(3) $13\times5-8\times13$,

(4) $65-104$,

(5) -39

がつぎつぎにえられる. (5)における結果は, $x=10$, $y=3$, $z=5$という,

変数への付値に対する表現(1)全体の値である.

命題計算の wff の場合には,変数がとることを許される 2 つの可能な値,すなわち真と偽があるだけであり，これらはそれぞれ‘T’と‘F’で表わされる.これらの 2 つの可能性しかないというわれわれの仮定は，実際上，すべての命題は真または偽であるという仮定と同じであり，排中律（定理44）に対応するものである. これらの 2 つの値は真理値（truth-values）とよばれる.

変数への真理値の付値に対して wff 全体の真理値を計算するためには，各論理的結合記号に対して，どのようにして複合式の値がその部分式の値によって決定されるかを示す表（マトリックス (matrix) とよばれる）が必要である. マトリックスは掛け算，足し算の表に対応するが，考慮すべき値が 2 つしかないので，マトリックスは全体として与えられうるけれども，数学的な表の方は一部分だけしか与えられないという違いがある（たとえば，われわれが習う掛け算の九々は12までである）. マトリックスはつぎの通りである.

A	− A
T	F
F	T

A → B		B: T	B: F
A	T	T	F
	F	T	T

A & B		B: T	B: F
A	T	T	F
	F	F	F

A v B		B: T	B: F
A	T	T	T
	F	T	F

A ⟷ B		B: T	B: F
A	T	T	F
	F	F	T

‘−’のマトリックスは，真なる命題の否定は偽であり，偽なる命題の否定は真であるという考察の結果としてえられる. ‘&’のマトリックスは，連言 A & B は A と B がともに真なるときに真であり，それ以外は偽であるという考察の結果としてえられる. ‘v’のマトリックスは，選言 A v B は A と B のうち少なくともひとつが真なるときに真であり，それ以外は偽であるという考察から結果としてえられる. ‘→’と‘⟷’のマトリックスには特異なところがある. それらがどういう考察の結果そうなるのかは，すこしあとに考えることにしよう.

これらのマトリックスの用法を例示するために，つぎの wff に $P=\mathrm{T}$, $Q=\mathrm{F}$ という付値を行なったときの値を求めよう．

(6)　$(P \rightarrow Q) \vee -Q \longleftrightarrow --P \& Q$.

代入によって，

(7)　$(\mathrm{T} \rightarrow \mathrm{F}) \vee -\mathrm{F} \longleftrightarrow --\mathrm{T} \& \mathrm{F}$

がえられ，マトリックスによって計算すれば，

(8)　$\mathrm{F} \vee \mathrm{T} \longleftrightarrow -\mathrm{F} \& \mathrm{F}$,

(9)　$\mathrm{T} \longleftrightarrow \mathrm{T} \& \mathrm{F}$,

(10)　$\mathrm{T} \longleftrightarrow \mathrm{F}$,

(11)　F

がつぎつぎにえられる．こうして wff 全体は，与えられた付値に対して値 F をとるのである．演算を単純化して，wff の下に1行の計算が行なわれるようにするのが便利である．すなわち，

P	Q	$(P \rightarrow Q) \vee -Q \longleftrightarrow --P \& Q$
T	F	T F F　T T F　F　T F T F F

左の欄には，wff のなかの変数をならべて書き，その下に問題となっている付値を書く．つぎにそれぞれの変数の値を，wff のなかにその変数が現われるすべての個所にうつして書き，wff の全体の値を段階を追って計算して行く．これらの段階が，結合記号の間の（第1節で述べた意味での）従属関係に対応することに注意する価値がある．すなわち，明らかなことであるが，結合記号の値を計算しうるに先立って，それに従属している結合記号の値を計算する必要があるのである．最後に wff そのものの値が，主要な結合記号——この場合は‘⟷’——の下に書かれる．

wff に対する真理表テストとは，その変数へのすべての可能な付値に対して wff の値を求めることである．ある wff がただ1つの変数，たとえば‘P’，を含んでいるならば，2通りの可能な付値がある．つまり $P=\mathrm{T}$ と $P=\mathrm{F}$ である．wff が2つの変数，たとえば‘P’と‘Q’，を含んでいるならば，可

能な付値は4通りある．つまり，(i)$P=\mathrm{T}$，$Q=\mathrm{T}$；(ii)$P=\mathrm{T}$，$Q=\mathrm{F}$；(iii)$P=\mathrm{F}$，$Q=\mathrm{T}$；(iv)$P=\mathrm{F}$，$Q=\mathrm{F}$．一般に，wff が n 個の変数を含んでいるならば，2^n の可能な付値がある．

wff の真理表テストは，wff の下に，各行にわけて書かれた，それぞれの付値に対する値を求めて行くことによって表示されるであろう．たとえば，

P	Q	$(P\rightarrow Q)\vee -Q\longleftrightarrow --P\,\&\,Q$
T	T	T T T　T F T　T　T F T T T
T	F	T F F　T T F　F　T F T F F
F	T	F T T　T F T　F　F T F F T
F	F	F T F　T T F　F　F T F F F

（このテストの第2行目は，言うまでもなく，同じ wff に対して先程計算された行と同じものである．）テストがこのようなかたちで与えられるとき，wff 全体の値は，主結合記号の下の列に示される．この列は，主要列（main column）とよばれてよいであろう．

学生はこれらの注意から，真理表テストを自分で行なう方法がすぐにわかるはずである．そして恐らく近道をとる方法を自分で考えつくことであろう（たとえば，'−−' は，それが現われるどの個所でも，無視されてよい）．変数に対する異なった可能な付値に，標準的な順序を決めておくと便利である．2変数の場合の標準的な順序は上に示されている．3変数の場合の標準的な順序はつぎのテストに示されるであろう．また4変数あるいはそれ以上の変数に対する付値についての，同様の標準的順序を，読者はくふうすることができる．

P	Q	R	$(P\,\&\,-Q)\vee R\rightarrow(R\,\&\,-Q\rightarrow -P)$
T	T	T	T F F T　T T T　T F　F T T　F T
T	T	F	T F F T　F F T　F F　F T T　F T
T	F	T	T T T F　T T F　T T　T F F　F T
T	F	F	T T T F　T F T　F F　T F T　F T
F	T	T	F F F T　T T T　T F　F T T　T F
F	T	F	F F F T　F F T　F F　F T T　T F
F	F	T	F F T F　T T T　T T　T F T　T F
F	F	F	F F T F　F F T　F F　T F T　T F

4変数を含む wffs に対しては16行が必要であり，5変数を含む wffs に対し

では32行が必要である，等々．従って現実に真理表テストを行なうことは，変数の数が多くなるにつれてだんだん実行不可能になってくる．それにもかかわらず，任意の数の変数に対して，真理表テストは全く機械的な手続であることは言っておいてよいことである．真理表テストを機械に行なわせることができるし，また事実そうされてきた（通常，機械の方が人間よりもその仕事がうまくやれるのである）．この点では，真理表によるテストは，テスト一般とは対照的である．全体としての論理学にとって証明を構成する機械的手続が存在するのではあるが，反証を構成する機械的手続がなく，従ってまたすべての文をテストするための一般的な機械的手順もないのである[1]．

さて，'$\rightarrow$' および '$\longleftrightarrow$' に対するマトリックスが，どのような考察から結果するかを考えるにあたって，連式49によって，$P \rightarrow Q$ と $-P \vee Q$ が相互導出可能であることに注意しよう．それ故，これらの連式は，変数への同じ付値に対して同じ値をとると，当然考えられるであろう．'$-P \vee Q$' について真理表テストをするならば，つぎの結果がえられる．

P	Q	$-$	P	$\vee$	Q
T	T	F	T	T	T
T	F	F	T	F	F
F	T	T	F	T	T
F	F	T	F	T	F

ひとつびとつ付値を行なった結果は，これが '$P \rightarrow Q$' と同じ値になることがわかる．

35によって，$P \rightarrow Q$ と $-(P \,\&\, -Q)$ もまた相互導出可能であり，'$-(P \,\&\, -Q)$' に対する真理表テストは全く同じ結果を与える．直観的には，P ならば Q という命題に関して最も重要なことは，P が真，Q が偽ならば，それが偽であることを，間違いなくわれわれは欲する，ということである．このことは少なくとも，そのマトリックスによって保証されている．'$\rightarrow$' のマトリックスについて同意がえられるならば，'$\longleftrightarrow$' のマトリックスはそれから導かれる．なぜならば，$P \longleftrightarrow Q$ は（$(P \rightarrow Q) \,\&\, (Q \rightarrow P)$）と同値であるようにしたいとわれわれは考えるのだからである．この後者の wff の実際の真理表

計算は，ほかならぬ‘⟷’のマトリックスを与える．それは読者が自分でチェックすべき事実である．

真理表テストに基づいて，命題計算のすべての wffs を3種類のいずれかに分類することができる．ある wff がその変数へのすべての可能な付値に対して，値Tをとるならば，それはトートロジー的（恒真的 tautologous）またはトートロジー（恒真式 tautology）とよばれる．ある wff がその変数へのすべての可能な付値に対して，値Fをとるならば，それは不整合的（inconsistent）または不整合（inconsistency）とよばれる．ある wff が少なくとも1つの付値に対しては値Tをとり，少なくとも1つの付値に対しては値Fをとるならば，それは偶然的（contingent）または偶然（contingency）とよばれる．明らかに，すべての wff は，これら3種類のもののうちのひとつ，そしてただひとつのみに属し，それがいずれであるかは，その真理表の主要列から直接に読み取られるのである．すべてがTとそこに出ているならば，その wff はトートロジー的であり，すべてがFとそこに出ているならば，その wff は不整合的であり，少なくとも1つがT，少なくとも1つがFとそこに出ているならば，その wff は偶然的である．（時として，「不整合的」のかわりに「矛盾的」または「自己矛盾的」という語が用いられる．第1章第3節では矛盾を違った仕方で定義したので，われわれはここではこの語を避けたのである．）さらに，ある wff がトートロジー的であるかあるいは偶然的であるならば，それは整合的（consistent）であるといわれる．従って wff は，少なくとも1つの付値に対して値Tをとるとき，またそのときに限って，すなわち不整合的でないとき，またそのときに限って，整合的であるといわれる．同様に，wff は偶然的であるかあるいは不整合的であるならば，非トートロジー的（non-tautologous）である．

これらの概念のうち，どれにもまして最も重要なのはトートロジーのそれである．トートロジーは，それを構成する変数の真理値がなんであってもつねに真なのであり，このことはそれがもっぱらその論理的形式のみによっ

て，つまりその論理的結合記号によって構成された構造のみによって，真である，ということである．故にトートロジーは定理と同じく，論理的法則，すなわち論理的根拠のみに基づいて真なる命題を表現しているとみなされうる．このことから，（導出規則によって定義される）定理と，（真理表テストによって定義される）トートロジーとは，いかなる関係にあるのかという問いが生じる．これはつぎの２つの節において答えられるのであるが，そこにおいては，すべての定理はトートロジーであり，すべてのトートロジーは導出規則から定理として証明されうる，ということが示されるのである．

２つの命題の間には，伝統的論理学において認められている６つの論理的関係がある．ある場合には，これらの関係があるかないかを証明するために，真理表による方法を用いてもよいであろう．それぞれの関係について，わたしはまずそれを定義し，つぎに真理表がどのようにしてそれぞれの場合に適用されうるかを示すことにしよう．

(i) ２つの命題ＡとＢは（ともに偽ではありうるとしても）ともに真であることが決してないならば，すなわち一方が真である場合にはいつも他方は偽であるならば，伝統的な用語で，反対（contrary）とよばれる．ところで，２つの命題がともに真であることが決してないということは，それらの連言がつねに偽であるということであり，これは，それらの連言の否定，－(Ａ＆Ｂ）がつねに真であるということである．故に，ＡとＢが命題計算の記法で表現されうるならば，[2)]ＡとＢが反対であるかどうかは，－(Ａ＆Ｂ）を真理表テストにかけることによって発見されるであろう．それがトートロジーならばそうであり，そうでないならばそうでない．というのは，－(Ａ＆Ｂ)がつねに真であるということは，－(Ａ＆Ｂ)が，その変数へのすべての可能な付値に対して真であるということだからである．

(ii) ２つの命題ＡとＢは，（ともに真でありうるとしても）ともに偽であることが決してないならば，すなわち一方が偽である場合にはいつも他方は真であるならば，小反対（subcontrary）である．ところで，２つの命題がとも

に偽であることが決してないということは，それらのうちの少なくともひとつがつねに真であるということであり，これはそれらの選言，A v Bがつねに真であるということである．故に，(i)におけると同様，AとBが命題計算の記法で表現されうるならば，AとBは，A v Bがトートロジーであるときまたそのときに限って小反対である．

(iii) 命題Aが真のときはいつも命題Bが真である（しかし逆は必ずしも成り立たない）ならば，AはBを含意 (imply)する．'→' のマトリックスから容易にわかるように，AとBが命題計算の記法で表現されうるならば，A→Bがトートロジーであるときまたそのときに限ってAはBを含意する．この場合，AはBに対して大小関係にある (A is superimplicant or superalternate to B) といわれることもある．

(iv) 命題Bが真のときはいつも命題Aが真である（しかし逆は必ずしも成り立たない）ならば，AはBに含意される．これも容易に示されるように，AとBが命題計算の記法で表現されうるならば，B→Aがトートロジーであるときまたそのときに限ってAはBに含意される．この場合，AはBに対して小大関係にある (A is subimplicant or subalternate to B) といわれることもある．

(v) 命題Aが真のときはいつも命題Bが真であり，Bが真のときはいつもAが真であるならば，これら2つの命題AとBは同値 (equivalent) である．容易に示されるように，AとBが命題計算の記法で表現されうるならば，A⟷Bがトートロジーであるときまたそのときに限ってAとBは同値である（この立場から言えば，実際にはA⟷BはAとBが同じ真理値をもつことを主張するものなのである）．この場合，AとBは相互含意 (coimplicant) であるといわれることもある．

(vi) 2つの命題AとBがともに真であることも，ともに偽であることもないならば，すなわち一方が真のときにはいつも他方は偽であり，一方が偽のときにはいつも他方は真であるならば，これら2つの命題AとBは矛盾

(contradictory) である．ところで，これらの命題の真理値がつねに一致しないということは，それらが同じ真理値をもつことが決してないということである．故に，AとBが命題計算の記法で表現されうるならば，−(A⟷B)がトートロジーであるときまたそのときに限ってAとBは矛盾である．

これら6つの関係がいずれもAとBの間で成り立たないならば，AとBは独立 (independent) である．AとBが命題計算の記法で表現されうるならば，一連の真理表テストによって，AとBの間にどの関係が成り立ち，どの関係が成り立たないかが決まるであろう．

伝統的論理学のこの部分は，真理値によって定義できるような2つの命題の間の，すべての可能な関係を枚挙しようとする（不十分な）試みであるとみなすことができる．そのような関係は16あることは，簡単な数学的計算の示すところであって，われわれはこれをつぎの表に示すことにする．

A	B	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p
T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	F	F	F	F	F	F	F	F
T	F	T	T	T	T	F	F	F	F	T	T	T	T	F	F	F	F
F	T	T	T	F	F	T	T	F	F	T	T	F	F	T	T	F	F
F	F	T	F	T	F	T	F	T	F	T	F	T	F	T	F	T	F

(a)−(p)の16列は，この節の始めの方で示した‘→’，‘&’，‘v’，‘⟷’に関連のあるような種類の，ありうるすべての可能な，異なったマトリックスを与える．たとえば，(e)においては‘→’のマトリックスが，(h)においては‘&’のマトリックスが，(b)においては‘v’のマトリックスが，(g)においては‘⟷’のマトリックスが，認められるのである．ところで，$P \rightarrow Q$，$P \& Q$，$P \vee Q$，$P \longleftrightarrow Q$は，ちょうど代数学で，$x+y$がxとyの関数であるというのと同じ意味で，PとQの関数であるということができる．このような関数を，数学の関数から区別して，真理関数 (truth-functions) とよぶ．そこで上の表は，すべての可能な2変数の真理関数を記載していることになる．

AとBが命題計算の記号で表現されうるならば，AがBを含意するという主張は，(e)によって定義されるAとBの関数，すなわちA→Bがトートロジーであるという主張にほかならない．同様に，AとBが小反対であるという

主張は，(b)によって定義されるAとBの関数，すなわちA∨Bがトートロジーであるという主張にほかならない．このようにして，(a)－(p)の列によって定義される異なった関数は，ありうるすべての関数を尽くしているのであるから，AとBの間の関係についてなされうるそれぞれ異なった主張，すなわち各関数について，AとBの関数がトートロジーであるという主張は，ちょうど16通りあることになる．実際，AとBが同値であるということは，(g)によって定義される関数，すなわちA⟷Bがトートロジーであるということである．AがBに含意されるということは，(c)によって定義される関数がトートロジーであるということである．なぜならば，真と偽の4通りの可能な組合せに対して，B→Aをテストすると，(c)の列がえられ，そのテストはB→Aがその列によって定義される関数であることを示しているからである．AとBが反対であるということは，(i)によって定義される関数がトートロジーであるということである．というのは，－(A＆B)のテストは，(i)の列を生ぜしめ，－(A＆B)がその列によって定義される関数であることを示すからである．最後に，AとBが矛盾であるということは，(j)によって定義される関数がトートロジーであるということである．なぜならば，－(A⟷B)のテストは(j)の列を生ぜしめ，－(A⟷B)がその列によって定義される関数であることを示すからである．こうして伝統的な関係(i)—(vi)のそれぞれと，(a)－(p)のなかの1つの列とが関連するのであるが，伝統的には区別されていない，さらに10個の，同様に定義可能な関係が存在するのである．

これら16個の関数の，さらに興味ぶかい点は，その各々に対して，‘→’と‘－’のみを用いて，それと同値な表現を見出すことができるということである．参考のため，そのような可能な表現の組を列挙しよう．

(a)	A→A	(p)	－(A→A)
(b)	－A→B	(o)	－(－A→B)
(c)	B→A	(n)	－(B→A)
(d)	A	(m)	－A

(e) A→B (l) −(A→B)

(f) B (k) −B

(g) −((A→B)→−(B→A)) (j) (A→B)→−(B→A)

(h) −(A→−B) (i) A→−B

'→' と '−' のマトリックスによって，これらの表現を実際にテストしてみれば，それらが列挙された16個の関数と同値であることが明らかになるであろう．さきに '→' のマトリックスの正当さを論じたとき見た通り，'$P \to Q$' は '$-P \vee Q$' とも，'$-(P \& -Q)$' とも同値である，という事実に照らして，それぞれの関数に対して，'v' と '−' だけ（あるいは '&' と '−' だけ）を含み，その関数に同値であるような表現を見出すことができるということは，驚くにはあたらない．

最後にひとつ，真理表による手続のうちここに述べておいてよいものがある．それは前節で定義された代入例に関連する．まず最初に，トートロジーの任意の代入例はそれ自身トートロジーである，ということに注意しよう．ここでは，この命題を厳密に証明することはしないであろうが，とにかくそれはある程度まで明らかなことなのでなければならない．Aがトートロジーであるならば，Aはその変数への，真理値のすべての可能な付値に対して値Tをとる．Aへの代入の過程においては，それぞれの変数はある wff によって組織的に置き換えられる．Aの代入例が真理表テストを受けるときには，その wff はそれぞれの付値に対して，すべてにわたって同じTかFかの値をとるであろう．従ってこの点から先は，テストはもとの真理表テストのある行と同じパターンをたどるであろう．そしてその代入例にもやはりまた，Tを与えることによって終るのでなければならない．同様の仕方で，しかしTのかわりにFとおいて考察するならば，不整合な式の任意の代入例はそれ自身不整合なことがわかる．

しかしながら，偶然の場合には，異なった事態が生じる．任意の偶然的 wff に対して，トートロジーであるような代入例を見出すことができるとと

もに，また不整合であるような代入例を見出すこともできる，ということが示されうる．このことはここでは証明しないが，そのような代入例を見出すためのきわめて一般的な手続を示すであろう．特定の場合にこの手続に従って行けば，読者はなぜそれでうまく行くのかがすぐにわかるであろう．

Aを偶然的な wff としよう．するとその変数への少なくとも1つの付値に対して，その wff は値Tをとる．そのような付値の特定の1つを選び，Aのなかの各変数に対して，それがその付値によって値Tをとるならば任意のトートロジー（たとえば‘$P \to P$’）を代入し，それがその付値によって値Fをとるならば任意の不整合な式（たとえば‘$-(P \to P)$’）を代入せよ．するとその結果えられるAの代入例はトートロジーであろう．またAは偶然的なのであるから，その変数への少なくとも1つの付値に対して，値Fをとる．そのような付値を1つ選び，それから正確に同じ手続を実行する．すなわち，その付値において値Tをとる変数に対しては，たとえば‘$P \to P$’を代入し，値Fをとる変数に対しては，たとえば‘$-(P \to P)$’を代入する．するとその結果えられるAの代入例は不整合的である．

簡単な例を1つ挙げれば十分であろう．‘$P \vee Q$’は偶然的であり，$P=$F で$Q=$Fならば値Fをとり，他の場合には値Tをとる．$P \vee Q=$Tとなるような付値，$P=$T，$Q=$F を選び，それから適宜‘P’には‘$P \to P$’を，‘Q’には‘$-(P \to P)$’を代入せよ．するとその結果えられる‘$(P \to P) \vee -(P \to P)$’は，‘$P \vee Q$’のトートロジー的代入例である．同様に，付値$P=$F，$Q=$F に対応する‘$-(P \to P) \vee -(P \to P)$’は，同じ偶然的 wff ‘$P \vee Q$’の不整合的代入例である．

練習問題

1　(i)つぎの wffs に対して真理表テストを行ない，そしてそれぞれの場合に，wff がトートロジー的か，偶然的か，不整合的かを述べよ．

(*a*)　$P \to P$

(*b*) $P \to -P$

(*c*) $-(P \to P)$

(*d*) P

(*e*) $-P \to (P \to Q)$

(*f*) $(P \longleftrightarrow Q) \longleftrightarrow -(P \longleftrightarrow -Q)$

(*g*) $(P \,\&\, Q) \,\&\, -(P \longleftrightarrow Q)$

(*h*) $(P \vee -Q) \,\&\, -(-P \to -Q)$

(*i*) $(P \,\&\, Q \to R) \to (P \to R) \,\&\, (Q \to R)$

(*j*) $(P \vee Q \to R) \longleftrightarrow (P \to R) \,\&\, (Q \to R)$

(*k*) $(P \to Q) \,\&\, (R \to S) \to (P \vee R \to Q \vee S)$

(ii) (i)の(*a*)−(*k*)のなかで，偶然的の場合には，トートロジー的な代入例と不整合的な代入例を見出せ．

2 (i) 16の可能な2変数の真理関数のそれぞれに同値な表現を，(*a*)たかだか‘&’と‘−’を用いて，(*b*)たかだか‘v’と‘−’を用いて，見出せ．

(ii) 可能な真理関数の表における関数(i)と(o)を，それぞれ‘A | B’および‘A ↓ B’によって表示してもよいであろう（これらはときとして「ストローク」関数〔‘stroke’-function〕という名前で知られている．‘A | B’は「AそしてBということはない」，‘A ↓ B’は「AでもBでもない」と読まれてよいであろう）．16の可能な2変数の真理関数のそれぞれに同値な表現を，(*a*)‘|’のみを用いて，(*b*)‘↓’のみを用いて，見出せ．（ヒント．真理表テストによって，‘$P \mid P$’と‘$P \downarrow P$’は‘$-P$’に同値であることがわかる．従って，‘$(P \mid Q) \mid (P \mid Q)$’は‘$-(P \mid Q)$’に同値であり，従って‘$P \,\&\, Q$’に同値である．同様に，‘$(P \downarrow Q) \downarrow (P \downarrow Q)$’は‘$P \vee Q$’に同値である．）

3 (i) Aを，任意の個数の変数を含んでいるが，結合記号としては‘&’のみを含んでいるwffとせよ．(*a*)Aはトートロジー的ではありえないことを示せ．(*b*)Aは不整合的ではありえないことを示せ．

(ii) Aを，任意の個数の変数を含んではいるが，結合記号としては‘v’の

みを含む wff とせよ．(*a*)Aはトートロジー的ではありえないことを示せ．(*b*)Aは不整合的ではありえないことを示せ．

4　つぎの3つの wffs について考察せよ．

(*a*)　$P\&(R\rightarrow R)\rightarrow -Q$

(*b*)　$P\&(Q\vee R)$

(*c*)　$P\rightarrow(Q\longleftrightarrow R)$

(i)　(*a*)−(*c*)のどれも，他のどの wff をも含意しないことを示せ．

(ii)　(*a*)−(*c*)の1つそして1つのみが，他の2つに対して小反対であることを示せ．

5　(i)　任意の wffs AおよびBに対して，AとBが反対ならば，それぞれが他の否定を含意すること，またそれらの否定は小反対であること，を示せ．

(ii)　任意の wffs AおよびBに対して，AとBが小反対ならば，それぞれの否定は他を含意すること，またそれらの否定は反対であること，を示せ．

(iii)　任意の wffs AおよびBに対して，(*a*)−Aと−Bが同値であるときまたそのときに限ってAとBが同値であること，(*b*)Aと−Bが矛盾であるときまたそのときに限ってAとBが同値であること，を示せ．

6　(i)　すべての可能な1変数の真理関数を示す表を書き，その各々に対して，'→' と '−' のみを含む同値な表現を見出せ．

(ii)　相異なった可能な3変数の真理関数はいくつあるか．*n*変数の真理関数については如何．

注1）実際には，この章の第5節の結果に照らして，命題計算のレベルにおいては反証は機械的に見出されうることがわかる．しかし，われわれが第3，第4章において取り扱う述語計算においては，反証を発見するための機械的手続は存在しないことが知られている．

2）この場合やまた他の場合に，この制約を加えるのは，第3，第4章において研究されるような種類の，より複雑な命題に対しては，命題計算は不十分であり，そして真理表という機械的仕組みは，これらの関係をテストするためにはもはや用いられえないからである．

第 4 節　命題計算の無矛盾性

われわれの導出規則が安全なものであるかという問いに対する肯定的な解答をうるために，真理表の方法を命題計算に対して適用することにする．実際，真理表テストによって，規則から証明可能なすべての定理はトートロジー的であることが示されるから，偶然的定理とか，不整合な定理とかはありえず，特にいかなる矛盾A＆－Aも，これはむろん不整合であるから，導出されることはできない．しかしながら，われわれは定理だけではなく，連式一般にも関心があるのである．すなわち，すべての導出可能な連式が，信頼できる論証のパターンであることが保証されるようにしたいのである．このより一般的な結果をうるためには，まず第1に真理表の手続を適用する範囲を，wffs から連式表現へ拡張することが必要である．

その拡張は容易である．任意の連式表現を，

$$A_1, \cdots\cdots, A_n \vdash B$$

としよう．$A_1, \cdots\cdots, A_n \vdash B$ の真理表テストは，$A_1, \cdots\cdots, A_n \vdash B$ のなかに現われる変数へのすべての可能な付値に対して，$A_1, \cdots\cdots, A_n$, B という wffs の真理値をきめることである．そのようなテストは，その連式表現の左の欄に wffs $A_1, \cdots\cdots, A_n$, B の任意のもののなかに現われるすべての変数をならべて書き，それらの変数の下に，標準的な書き方によって，真理値のすべての可能なわりあてを書き，それから，これらの付値に対して，連式表現のなかの各 wff を個別的に真理表テストすることによって，示される．たとえば，

P	Q	$P \to Q$,	$-Q \vdash$	$-P$
T	T	T T T	F T	F T
T	F	T F F	T F	F T
F	T	F T T	F T	T F
F	F	F T F	T F	T F

つぎに，連式表現がトートロジー的であるとはどういう意味であるかを定義する．$A_1, \cdots\cdots, A_n \vdash B$ は，その変数への，$A_1, \cdots\cdots, A_n$ のすべてが値Tをとるようなすべての付値に対して，Bもまた値Tをとるならば，トートロジ

一的である．いまテストされた連式表現はトートロジー的である．なぜならば，‘$P\to Q$’ および‘$-Q$’がともに値Tをとるような付値は1通りだけ（P＝F，Q＝F）であり，この付値に対して結論‘$-P$’もまた値Tをとるからである．同じことであるが，$A_1,\cdots\cdots, A_n\vdash B$ は，$A_1,\cdots\cdots, A_n$ がすべて真になり，そしてBが偽になるような付値がないならば，トートロジー的である．連式表現が仮定 $A_1,\cdots\cdots, A_n$ をもたない，極限的な場合には，この定義は，Bがその変数へのすべての付値に対して値Tをとることを要求するだけであり，従って$\vdash$ Bは，Bがトートロジー的 wff である場合に限って，トートロジー的連式表現である．

トートロジー的連式表現を説明するための，第2のしばしば有用な方法は，それぞれの連式表現 $A_1,\cdots\cdots, A_n\vdash B$ を，それに対応する条件法とわれわれのよぶ単一の wff,

$$A_1\to(A_2\to(\cdots\cdots(A_n\to B)\cdots\cdots))$$

に関連させることである．たとえば，さきにテストされた連式表現に対応する条件法は，

$$(P\to Q)\to(-Q\to -P)$$

である．極限的な場合として，仮定 $A_1,\cdots\cdots, A_n$ が存在しないならば，その場合の対応する条件法はたんにBそのものである（これはBが現に条件法などではないかもしれないのだから，すこし奇妙ではあるが）．そこで，連式表現はそれに対応する条件法が（前節の意味において）トートロジー的であるとき，またそのときに限って（上に定義された意味において）トートロジー的であることを，われわれは示すことができる．

なぜならば，連式表現 $A_1,\cdots\cdots, A_n\vdash B$ に対応する条件法がトートロジー的ではないと仮定しよう．すると，$A_1,\cdots\cdots, A_n\vdash B$ のなかの変数への真理値のある付値によって，$A_1\to(A_2\to(\cdots\cdots(A_n\to B)\cdots\cdots))$ の値としてFが生じる．‘$\to$’のマトリックスにより，これはその付値に対して，A_1＝T であって $A_2\to(\cdots\cdots(A_n\to B)\cdots\cdots)$＝F である場合にのみ可能である．これはまた，

$A_2=T$ であって $A_3\to(\cdots\cdots(A_n\to B)\cdots\cdots)=F$ である場合にのみ可能である．これを続けて行くと，この付値に対しては，$A_1,\cdots\cdots, A_n$ がすべて値Tをとり，Bは値Fをとるのでなければならず，このことから $A_1,\cdots\cdots, A_n\vdash B$ もまたトートロジー的でないことになる．逆に，$A_1,\cdots\cdots, A_n\vdash B$ がトートロジー的でないと仮定しよう．すると，$A_1,\cdots\cdots, A_n$ はすべて値Tをとるが，Bは値Fをとるような付値が存在する．この付値に対しては，'→' のマトリックスにより，$A_n\to B=F$ なる故，$A_{n-1}\to(A_n\to B)=F$．以下同様．故に対応する条件法 $A_1\to(A_2\to(\cdots\cdots(A_n\to B)\cdots\cdots))$ はこの付値に対して値Fをとらねばならない．従ってこれもまたトートロジー的ではないことになる．

それ故，上述のテストにかわる方法として，連式表現がトートロジー的であるか否かを決めるために，それに対応する条件法を標準的な方法でテストしてもよいのである．

連式に対して10個の原始的導出規則のみを用いて証明が見出されるならば，その連式を，簡単な言い方をとって，導出可能（derivable）であるとよぶことにしよう．この節においてえられる主な結果は，すべての導出可能な連式はトートロジー的である，ということである．それはつぎのメタ定理（metatheorem）において述べられる（命題計算のなかにおける〔in〕ある結果に対しては，「定理」というよび名をあててきた．だがここに述べられるものは，むしろ，計算についての〔about〕結果なのである）．

メタ定理Ⅰ：すべての導出可能な連式は，トートロジーである．

証明のアウトライン．導出可能な連式の数は無限であること（たとえば，導出可能な連式のすべての可能な代入例もまた，（S2）によって知られる通り，導出可能である）を記憶すべきである．従って，個々の連式を順次調べて行くことによって進むことはできない．すなわち，より一般的な証明の方法が必要である．われわれの用いる方法は，帰納法による証明（proof by induction）として知られている数学的方法と密接な関係がある．すべての数があ

る性質をもっていることを示したいとするならば，0がその性質をもち，また与えられた数がその性質をもつならば，数列におけるそのつぎの数がその性質をもつ，ということを示せば十分である.[1)]0がその性質をもつならば1がその性質をもつことが示され，1がその性質をもつならば2がその性質をもつことが示され，以下同様にして任意の与えられた数にまで到ることができる．いまの場合は，導出可能な連式は，定義によって，証明をもち，そしてこの証明は幾ら長くてもよいが有限の長さでしかありえないものであって，段階を追って進むものである，ということを想起していただきたい．その証明は，規則Aの適用から始まらねばならない．なぜならば，証明を始める方法はほかにはないからである．そしてそのあとの段階は（それもまたAの適用でないならば）つねに決まった仕方で，証明の前の行に依存しているのである．それ故，(i)Aの適用はつねにそれ自身でトートロジー的連式を導くということ，そして(ii)トートロジー的連式に対応する行に依存して行なわれる，他の9個の規則の適用もまた，つねにトートロジー的連式を導く，ということが示されたならば，導出可能な連式はつねにトートロジー的である，ということが有効に示されたことになるであろう．従ってわれわれの証明は2段階にわかれる．まず(α)Aの適用はつねにトートロジー的連式を生ぜしめることを示し，つぎに(β)証明の与えられた段階において，前の行がトートロジー的連式に対応するならば，これらの行のあるものに対して，他の9個の規則のひとつを適用するならば，またトートロジー的連式に対応する行がその結果として導かれることを示すのである．こういうわけで(β)においては，仕事は9段階にわかれ，各段階において条件的命題が証明される．

(α)の証明．仮定の規則だけで導出可能な任意の連式はトートロジー的である．なぜならば，そのような連式はA⊢Aの形式でなければならないが，これは明らかにトートロジー的だからである．

(β)の証明．(i)MPP．MPP の適用においては，AおよびA→Bが依存する仮定のプールされたものに基づき，前提AおよびA→Bから，結論Bへと進

む．いまAとA→Bの現われる行が，トートロジー的連式に対応していると仮定しよう．われわれが示そうとするのは，Bが現われる行もまた，トートロジー的連式に対応するということである．これがそうでないと仮定して不合理を演繹しよう．新しい連式がトートロジー的でないとするならば，明らかに，その変数への真理値の付値のなかには，Bに値Fを与え，そのすべての仮定に値Tを与えるものが存在する．これらの仮定は，AおよびA→Bが依存するすべての仮定を含むのであるから，同じ付値はAとA→Bに値Tを与えることになる．なぜならば，AとA→Bが現われる行は，トートロジー的連式に対応するからである．しかるにこの付値が，AとA→Bに値Tを与えるとすれば，'→' のマトリックスにより，その付値はBにも値Tを与えねばならない．これは不合理である．なぜなら，問題になっている付値に対しては，Bは値Fをとると仮定したのだからである．よってトートロジー的連式に対する MPP の適用はつねにトートロジー的連式を導く．

(ii) DN．DN の適用においては，前提Aから同じ仮定に基づいて，結論－－Aへと進むか，あるいはその逆である．第1の場合，Aが現われる行がトートロジー的であると仮定しよう．すると，そこに証明された連式のなかの変数に対する，各仮定に値Tを与えるような付値は，つねにAにも同じ値Tを与える．'－'のマトリックスにより，そのような付値はいずれもまた－－Aにも値Tを与えるであろうから，－－Aが現われる新しい行もまたトートロジー的であろう．第2の（－－Aが前提でAが結論である）場合も同様である．よってトートロジー的連式に対するDN の適用はつねにトートロジー的連式を導く．

(iii) MTT．(i)と同じ考察によって，トートロジー的連式に対する MTT の適用はつねにトートロジー的連式を導くことが示される．（この章の第2節で示された通り，MTT は導出された規則としてえられるから，いずれにしてもここで考察される必要はない．）

(iv) CP．CP の適用においては，$A_1, \cdots\cdots, A_n, A_{n+1} \vdash B$ の形式の連式から，

$A_1, \cdots\cdots, A_n \vdash A_{n+1} \to B$ の形式の連式へと，実行可能な仕方で進む．その場合，A_{n+1} は取り除かれた仮定である．いま，$A_1, \cdots\cdots, A_n, A_{n+1} \vdash B$ はトートロジー的であるが，$A_1, \cdots\cdots, A_n \vdash A_{n+1} \to B$ はトートロジー的ではないと仮定しよう．するとその連式のなかの変数への真理値の付値のなかには，$A_1, \cdots\cdots, A_n$ のすべてに値Ｔを与え，$A_{n+1} \to B$ には値Ｆを与えるものが存在する．‘→’のマトリックスにより，この付値は A_{n+1} に値Ｔを与え，Ｂに値Ｆを与える．さもないと，$A_{n+1} \to B$ は値Ｔをとるであろうからである．しかるにそのような付値は，$A_1, \cdots\cdots, A_n, A_{n+1} \vdash B$ を非トートロジー的にし，仮定に反する．よってトートロジー的連式に対する CP の適用はつねにトートロジー的連式を導く．

(v) &I．&I の適用においては，ＡおよびＢが依存する仮定のプールされたものに基づいて，前提ＡおよびＢから，結論Ａ＆Ｂへと進む．いま，ＡとＢが現われる行がトートロジー的連式に対応すると仮定しよう．するとプールされた仮定のなかの変数に対して，これらすべての仮定に値Ｔを与えるような付値を行なえば，それはつねにＡとＢにそれぞれ値Ｔを与える．なぜならば，Ａ，Ｂのそれぞれの仮定は，プールされたもののなかに含まれているからである．それ故‘&’のマトリックスにより，そのような付値はつねに，Ａ＆Ｂにも値Ｔを与える．よってトートロジー的連式に対する &I の適用はつねにトートロジー的連式を導く．

(vi) &E．トートロジー的連式に対する &E の適用がつねにトートロジー的連式を導くことを示すことは，（やさしい）練習問題として読者のために残しておく．

(vii) vI．‘v’のマトリックスについて考察することにより，トートロジー的連式に対する vI の適用はつねにトートロジー的連式を導くことが示される．詳細は読者にまかす．

(viii) vE．vE の適用におては，ＡｖＢの依存する仮定，およびＡからＣを導出するのに用いられた（Ａ以外の）仮定，およびＢからＣを導出するのに

用いられた（B以外の）仮定のプールされたものに基づいて，AからCが証明され，またBからもCが証明されるという条件の下において，前提A v Bから結論Cへと進む．いま，A v Bが現われる行がトートロジー的連式に対応し，CがAからの結論として現われる行も，CがBからの結論として現われる行もそうであると仮定しよう．証明すべきことは，Cが複合的にプールされた仮定からの結論として現われる行もまた，トートロジー的連式であるということである．そこで，いまそうではないとしてみよう．すると仮定のすべてに値Tを与えるが，Cには値Fを与えるような，変数への付値が存在する．これらの仮定は，A v Bが依存するすべての仮定を包含していることから，そのような付値は，A v Bに値Tを与えねばならないことになる．故に‘v’のマトリックスにより，AまたはBのいずれかが，この付値に対して値Tをとる．Aが値Tをとるとせよ．この場合には，CがAから導出される行は，トートロジー的ではありえない．なぜならば，この付値はAを含むそのすべての仮定に値Tを与えるが，Cには値Fを与えるからである．Bが値Tをとるとせよ．この場合にも，同様に，CがBから導出される行はトートロジー的ではありえない．いずれの場合にも不合理に導かれる．よってトートロジー的連式に対する vE の適用はつねにトートロジー的連式を導く．

(ix)　RAA. RAA の適用においては，$A_1, \cdots\cdots, A_n, A_{n+1} \vdash B \ \& -B$ の形式の連式から，$A_1, \cdots\cdots, A_n \vdash -A_{n+1}$ の形式の連式へと，実行可能な仕方で進む．第1の連式はトートロジー的であるが，第2の連式はそうではないと仮定しよう．すると，$A_1, \cdots\cdots, A_n$ のすべてに対して値Tを与え，$-A_{n+1}$ には値Fを与えるような，第2の連式のなかの変数への付値が存在する．このことから，‘−’のマトリックスによって，その付値は A_{n+1}に値Tを与えねばならない．このように，この付値は第1の連式のすべての仮定に値Tを与えるから，この第1の連式がトートロジー的であるという仮定によって，この付値はB＆−Bにもまた値Tを与えねばならなくなる．これは‘&’と‘−’のマトリックスによって不合理である．よってトートロジー的連式に対する

RAAの適用はつねにトートロジー的連式を導く.

要するに，トートロジー的連式に対して9個の規則の任意のものを適用するならば，その結果はつねにトートロジー的連式となる．規則Aによって，われわれはトートロジー的連式から出発することしかできないのだから，原始的規則によって導出できる連式はすべてトートロジー的であり，従ってメタ定理がえられることになるのである.

導出可能な連式が仮定をもたず，従ってその結論は定理であるという特殊な場合に対して，メタ定理Ⅰから直ちにえられる帰結として系Ⅰが挙げられる.

系Ⅰ：命題計算のすべての定理はトートロジー的である.

命題計算のような論理的体系は，それに対する規則が，矛盾を定理として導出することを可能ならしめないならば，無矛盾（consistent）であると言われる．矛盾A＆－Aは不整合な式であり，従ってトートロジーではないから，系Ⅰからつぎの系がえられる.

系Ⅱ：命題計算は無矛盾である.

TIやSIのような導出された規則について論じた際に，これらの規則を用いた証明は，原始的規則のみを用いた同じ連式の（一般にはより長い）証明によって，つねに置き換えることができるということを強調したが，その理由はいまや明らかでなければならない．そうでなければ，これらの導出された規則が非トートロジー的連式を導出することを可能ならしめないということを確信しうるためには，特別の証明が必要になるであろう.

メタ定理Ⅰが，なぜわれわれの導出規則の信頼性に対する確信を与えるのかをみよう．はじめに強調したことであるが，健全な論証の必要条件は，そこにおいては真なる仮定から偽なる結論へと導かれることが決してない，ということであった．命題計算の導出可能な連式をそのパータンとしてもつ論

証はすべて，少なくともこの条件を満たすものであるということが，いまや知られうるのである．というのは，そのような連式はすべて，メタ定理Ｉによれば，トートロジー的であり，このことは，その仮定が真である場合にはつねに，その結論もまた真であるということにほかならないからである．導出可能な連式のP，Q，R，等をそれによって置き換えて，真なる仮定と偽なる結論がえられることになるような，特定の命題は存在しない．このようにして，真理表による方法は，われわれの導出規則に関する基本的な問題に答えるのに役立ったのである．

いまやわれわれは，そうありたいものであるが，導出可能な連式の健全性にある程度の自信を覚えるのであるから，その限りにおいて，現実の論証の妥当性を，そのパターンが規則から証明されうることを確かめることによって示すのに，われわれの規則を用いてもよいであろう．しかしながら，真理表による方法はさらに，論証パターンの不妥当性を示すことをも可能にするのである．ある連式がトートロジー的でないことが，真理表テストによって示されると仮定しよう．するとメタ定理Ｉにより，その連式は規則から導出可能でない．またそれが導出可能であってはこまるであろう．なぜならば，その連式の変数へのある付値に対して，そのすべての仮定を真とするが，その結論は偽とすることができるということが，この真理表テストによって示されるからである．問題になっている，明らかに不妥当な論証パターン——真なる仮定と偽なる結論——の例を発見するためには，この付値における値を，これらの値をもつ現実の命題によって置き換えさえすればよい．それ故，想像力が必要でもあろうそのような例の探索をするかわりに，せいぜい忍耐を要求するに過ぎない真理表テストによってすますことができるのである．

真理表テストを骨折って全部行なうかわりに，手っ取り早くチェックできる場合がしばしばある．たとえば，つぎの連式が妥当か不妥当かを考えてみよう．

(1)　$P \rightarrow (Q \rightarrow R),\ P \,\&\, -Q \vdash -R.$

値Tを'$P\to(Q\to R)$'と'$P\&-Q$'とに与え，値Fを'$-R$'に与えることによって，この連式を不妥当にすることを試みよう．$P\&-Q=$T ならば，'P'と'$-Q$'はともに値Tをとらねばならないから，$P=$T，$Q=$F．$-R=$Fならば，$R=$T．しかるにこれらの値に対して，$P\to(Q\to R)=$Tがえられる．言い換えると，$P=$T，$Q=$F，$R=$Tなる付値は，2つの仮定に値T，結論に値Fを与え，こうして完全な8行のテストをするまでもなく，この連式がトートロジー的でないことが示される．他方，つぎの連式を考えてみよう．

(2)　$P\to(Q\to R)$，$P\&-R\vdash -Q$．

$P\&-R=$T，$-Q=$Fとおいて(2)を不妥当にしようとすると，$P=$T，$R=$F，$Q=$Tがえられる．しかるにこの付値に対しては，$P\to(Q\to R)=$F．このことは，いかなる付値も2つの仮定を真ならしめ，結論を偽ならしめることができないことを示している．故にこの連式はトートロジー的である．そしてわれわれの規則からそれの証明を求めることにとりかかることができる．

最後にひとこと，質料的含意のパラドックス(第2節参照)について述べておこう．第3節に与えられた'→'のマトリックスに照らして，条件法$P\to Q$は，その前件Pの真理値がなんであっても，その後件Qが真ならば真とされる．また条件法$P\to Q$は，その後件Qの真理値がなんであっても，その前件Pが偽ならば真とされる．50および51の結果は，これらの事実を連式の形式において単純に反映しているものと見ることができ，そして'→'の真理値についてこのことがわかっているならば，推論の安全なパターンとしてそれらを受けいれることができるのである．メタ定理Ⅰにより，50および51はトートロジー的であり，従って真なる仮定から偽なる結論へと導くことはない．実際，'$P\to Q$'が（語の通常の意味における）「PならばQ」と異なるのは，「PならばQ」が真理関数ではない場合にも，'$P\to Q$'は真理関数——その真理値をPとQの真理値によって完全に決定される——であるという限りにおいての話である．しかしながら，両者に共通するものは，どちらも，Pが真

Qが偽である場合には偽と考えられるという，大へん重要な特徴である．Pであることと，Qでないことがともに真ではないということが，「PならばQ」が真であるための必要条件である．しかるにこの条件は，'$P \to Q$'が'$-(P \& -Q)$'と同値であることからもわかる通り，'$P \to Q$'が真であるために必要かつ十分なのである．

練　習　問　題

1　証明を発見する練習の追加として，またつぎの節でその結果が必要となるので，つぎの連式を証明せよ．

(*a*)　$P \& Q \vdash P \to Q$

(*b*)　$-P \& Q \vdash P \to Q$

(*c*)　$-P \& -Q \vdash P \to Q$

(*d*)　$P \& -Q \vdash -(P \& Q)$

(*e*)　$-P \& Q \vdash -(P \& Q)$

(*f*)　$-P \& -Q \vdash -(P \& Q)$

(*g*)　$P \& -Q \vdash P \vee Q$

(*h*)　$-P \& Q \vdash P \vee Q$

(*i*)　$P \& Q \vdash P \longleftrightarrow Q$

(*j*)　$P \& -Q \vdash -(P \longleftrightarrow Q)$

(*k*)　$-P \& Q \vdash -(P \longleftrightarrow Q)$

(*l*)　$-P \& -Q \vdash P \longleftrightarrow Q$

2　仮定がすべて真になり，結論が偽になるような，変数への付値を見出すことによって，つぎの論証のパターンが不妥当であることを示せ．

(*a*)　$P \& Q \to R \vdash P \to R$

(*b*)　$P \to Q \vee R \vdash P \to Q$

(*c*)　$P \to Q$，$P \to R \vdash Q \to R$

(*d*)　$P \to R$，$Q \to R \vdash P \to Q$

（*e*）　$P \rightarrow (Q \rightarrow R)$，$Q$，$-R \vdash P$

（*f*）　$P \longleftrightarrow -Q$，$Q \longleftrightarrow -R$，$R \longleftrightarrow -S \vdash P \longleftrightarrow S$

注1）「数」は，ここでは自然数（141頁注1参照），すなわち，数0，1，2，3，etc. のひとつを意味する．

第5節　命題計算の完全性

注意深い読者はお気付きになったに違いないが，前節では，すべての導出可能な連式がトートロジー的であることは示されたけれども，その逆が成り立つか否か，すなわち，すべてのトートロジー的連式がわれわれの規則から導出可能かどうかは，未解決の問題として残されている．これに肯定的な解答を与えるのがこの節の仕事である．その結果が重要なのは，この章のはじめに提起された未解決の問題，いかなる意味においてわれわれの規則は完全なものとみなされうるか，に対する答えをそれが用意することにある．これから証明しようとしていることから見ると，それらの規則は，すべてのトートロジー的連式に証明を与えるという意味において，完全なのである．故に，既に導出可能であるのではない連式を，証明することを可能ならしめるような規則が付け加えられるとしても，これらの連式は非トートロジー的な連式でしかありえないであろう．これらの連式は，直観的な理由からも，われわれが論証の健全なパターンとみなそうとはしないであろうようなものである．なぜならば，それらに対しては，仮定をすべて真にし，結論を偽にする付値が存在するであろうからである．

以下の証明はややこみいっている．われわれはメタ定理IIとして，すべてのトートロジー的 wff（連式というよりはむしろ wff）は，定理として導出可能であることを証明する．このことの証明は，その途上において必要となる補題（補助定理（lemma），すなわち補助的結果）を設けて進行する．すべてのトートロジー的連式が導出可能であるというメタ定理IIIは，メタ定理IIから，かなり容易に導かれる．最後に，これらのメタ定理から幾つかの系が

導かれ，それらの結果に照らして命題計算が論じられる．

メタ定理 **II**：すべてのトートロジー的 wff は定理として導出可能である．

証明のアウトライン．仮定により，真理表テストのもとにおいてトートロジー的であるような wff Aを選ぶ．もちろんAは長くて複雑なものであるかも知れない．それについてわかっていることは，それを構成する変数へのすべての付値に対して，それが値Tをとるということだけである．われわれの仕事は，どのようにして，そのような wff が定理であることが，10個の導出規則のみを用いて一般的に知られうるかを示すことである．われわれはこれを，求められる証明のなかで，本質的には真理表テストをそのまま写すことによって，行なう．補題として，任意の wff に対する真理表テストの各行に対応して，導出可能な連式を書くことができる，ということを証明する．その連式の仮定は，与えられた wff に含まれている変数であり，それらの仮定は，問題になっている付値において，変数が値Fをとるか値Tをとるかに応じて，否定されて現われるか否定されないで現われるかである．また連式の結論となるのは，テストされる wff であり，問題になっている付値に対して，それが値Fをとるか値Tをとるかに応じて，否定されて現われるか否定されないで現われるかである．つぎにわれわれは，トートロジー的 wff Aの場合について，補題によってえられる導出可能な連式を，Aを定理として導出するために，どのように用いることができるかを示す．

証　明

補題． Aが任意の wff で，命題変数 $V_1, \cdots\cdots, V_n$ を含むとしよう．そして $V_1, \cdots\cdots, V_n$ に対するある付値を考えよう．そのような変数 V_i のそれぞれに対して，V_i が与えられた付値において値Tをとるか Fをとるかに応じて，W_i は V_i であるか $-V_i$ であるかであるとしよう．その場合には，この付値に対して，Aが値Tをとるかあるいは Fをとるかに応じて，それぞれ

$$W_1, \cdots\cdots, W_n \vdash A$$

あるいは，

$$W_1, \cdots\cdots, W_n \vdash -A$$

が導出されうる．

例．Aを‘$-P \to -Q \vee R$’と仮定し，$P=\mathrm{F}$，$Q=\mathrm{T}$，$R=\mathrm{F}$ なる付値を考えよう．この付値に対して，W_i という wffs は，‘$-P$’($P=\mathrm{F}$なる故)と‘Q’($Q=\mathrm{T}$なる故)と‘$-R$’($R=\mathrm{F}$なる故)である．この付値に対して，‘$-P \to -Q \vee R$’は，テストから直ちに明らかなように，値Fをとる．従って，補題により，第2の場合が適用され，

$$-P,\ Q,\ -R \vdash -(-P \to -Q \vee R)$$

が導出可能な連式である．

補題の証明．証明の技術は，メタ定理Iの証明において用いられたものと関連し，これもまた数学的帰納法に類似している．われわれはつぎのことを示す．(α)Aが可能な最も短かい wff，すなわち命題変数そのものである場合には，補題は成り立つ．(β)wffs BとCに対して補題が成り立つとすれば，$-B$，$B \to C$，$B \& C$，$B \vee C$ および $B \longleftrightarrow C$ に対しても補題は成り立つ．(α)と(β)から，補題は任意の wff に対して，成り立つことが帰結する．なぜならば，いかなる wff も第1節の形成規則によって，‘$-$’，‘$\to$’，‘&’，‘v’そして‘$\longleftrightarrow$’のような結合記号を組織的に導入することによって，命題変数から構成されるのだからである．

(α)Aが命題変数Vであるとしよう．Vに対しては可能な付値は2つしかない．すなわち $V=\mathrm{T}$ と $V=\mathrm{F}$ である．$V=\mathrm{T}$ という付値を考えてみよう．その場合には，AはVである故，値Tそのものをとる．それ故，つぎの連式，

$$V \vdash V$$

が導出可能であることが示されねばならない．これは規則Aによって直ちに証明される（連式29参照）．同様に，$V=\mathrm{F}$ ならば，AはVであるから，ま

た値Fをとる．そしてつぎの連式，

$$-V \vdash -V$$

が導出可能であることが示されねばならない．これも，上と同様，規則Aによって直ちに証明される．

(β)wffs BとCに対して補題が成り立つとする．われわれは補題が $-B$，$B \rightarrow C$，$B \& C$，$B \vee C$ そして $B \longleftrightarrow C$ に対して成り立つことを示さねばならないのである．これらの場合を順に考えていこう．

(i)　$-B$．$V_1, \cdots\cdots, V_n$ をBに含まれる変数とし，まず与えられた付値に対して，Bが値Tをとるとしよう．この付値に対して，$-B$は値Fをとるであろう．仮定により，補題はBに対しては成り立つ故，つぎの連式

$$W_1, \cdots\cdots, W_n \vdash B$$

は導出可能である．この場合，$W_1, \cdots\cdots, W_n$ の $V_1, \cdots\cdots, V_n$ に対する関係は，補題に述べられているようなものである．われわれが証明しなければならないのは，つぎの連式，

$$W_1, \cdots\cdots, W_n \vdash --B$$

が導出可能であることである．しかるに，これは与えられた連式の証明から，規則 DN を1回適用することによって，直ちにえられる．第2に，与えられた付値に対して，Bは値Fをとるとしよう．このことから，$-B$は値Tをとることになる．仮定により，補題が適用されて，

$$W_1, \cdots\cdots, W_n \vdash -B$$

は導出可能である．しかるに，これこそ補題が$-B$に対して成り立つことを示すために，われわれが証明する必要のある連式にほかならない．

(ii)　$B \rightarrow C$．$U_1, \cdots\cdots, U_j$ をBに含まれる変数とし，$V_1, \cdots\cdots, V_k$ をCに含まれる（必ずしも相異ならない）変数であるとする．$U_1, \cdots\cdots, U_j, V_1, \cdots\cdots, V_k$ への与えられた付値に対して，$B=T$ および $C=T$，$B=T$ および $C=F$，$B=F$ および $C=T$，あるいは $B=F$ および $C=F$，となるのに応じて，4つの場合を考察せねばならない．

（a）　B＝T および C＝T としよう．‘→’のマトリックスにより，B→C＝T．仮定により，

$$W_1, \cdots\cdots, W_j \vdash B$$

および

$$X_1, \cdots\cdots, X_k \vdash C$$

が導出されうる．その場合，$W_1, \cdots\cdots, W_j$ と $U_1, \cdots\cdots, U_j$，また $X_1, \cdots\cdots, X_k$ と $V_1, \cdots\cdots, V_k$ の関係は，補題に述べられているようなものである．証明すべきことは，

$$W_1, \cdots\cdots, W_j,\ X_1, \cdots\cdots, X_k \vdash B \rightarrow C$$

が導出可能であるということである．しかるに，与えられた連式の証明から，&I を適用することによって，必要ならば，行の番号を付けかえて，

$$W_1, \cdots\cdots, W_j,\ X_1, \cdots\cdots, X_k \vdash B \,\&\, C$$

の証明を容易に構成することができる．2.4.1(a)（$P \,\&\, Q \vdash P \rightarrow Q$）を用い，SI を適用することによって，求める連式が導かれる．

（b）　B＝T および C＝F としよう．すると，B→C＝F．そこで，

$$W_1, \cdots\cdots, W_j \vdash B$$

および

$$X_1, \cdots\cdots, X_k \vdash -C$$

が導出可能なものとしてえられる．そして証明すべきことは，

$$W_1, \cdots\cdots, W_j,\ X_1, \cdots\cdots, X_k \vdash -(B \rightarrow C)$$

が導出可能であるということである．（a）の場合と同様，&I を適用し，つぎに 2.2.5(g)（$P \,\&\, -Q \vdash -(P \rightarrow Q)$）を用い，SI を適用すれば十分である．

（c）　（a）および（b）と同様．2.4.1(b) と SI を用いる．

（d）　（a）および（b）と同様．2.4.1(c) と SI を用いる．

(iii)　B & C．(ii) におけると同様，4 つの場合を考察し，また同じ記号を用いる．

（a）　B＝T および C＝T としよう．

$$W_1, \cdots\cdots, W_j \vdash B$$

および

$$X_1, \cdots\cdots, X_k \vdash C$$

から

$$W_1, \cdots\cdots, W_j, X_1, \cdots\cdots, X_k \vdash B \& C$$

をうるためには，&I を適用すれば十分である．

（*b*）　B＝T および C＝F としよう．すると，B＆C＝F．－(B＆C) を B＆－C から導くには，&I および 2.4.1(*d*) と SI を用いる．

（*c*）（*b*）と同様．2.4.1(*e*) と SI を用いる．

（*d*）（*b*）と同様．2.4.1(*f*) と SI を用いる．

(iv)　B∨C．可能な4つの場合が順に，それぞれ 1.3.1(*e*)，2.4.1(*g*)，2.4.1(*h*)，1.5.1(*f*) と SI を用いて証明される．

(v)　B⟷C．可能な4つの場合が順に，2.4.1(*i*)－(*l*) と SI を用いて証明される．

（α）と（β）を合わせたものは，われわれの証明において，変数への与えられた付値に対する，真理表による wff の真理値決定の各段階が，写されうることを示している．補題を述べたあとに挙げた例をもう一度考えてみよう．（α）によって，つぎの3つの連式がすべて導出されうる．

$$-P \vdash -P$$

$$Q \vdash Q$$

$$-R \vdash -R.$$

与えられた付値に対して，‘$-Q$’ は値Fをとる．このことから（β)(i) により，つぎの連式の証明を構成することができる．

$$Q \vdash --Q.$$

与えられた付値に対して，‘$-Q \vee R$’ は値 F をとる．このことから（β)(iv) により，与えられた証明からつぎの連式の証明を構成することができる．

$$Q,\ -R \vdash -(-Q \vee R).$$

最後に，与えられた付値に対して，'$-P \to -Q \vee R$' は値Fをとる．このことから（β)(ii) により，与えられた証明からつぎの連式の証明を構成することができる．

$$-P,\ Q,\ -R \vdash -(-P \to -Q \vee R).$$

そしてこれが，補題によれば，導出されるべき連式である．従って，（α）と（β）を合わせたものによって，補題が全く一般的に証明されることがわかる．

メタ定理IIを補題から証明するために，いまAを，変数 $V_1, V_2, \cdots\cdots, V_n$ を含むトートロジー的 wff であるとしよう．Aはトートロジー的であるから，その変数へのすべての付値に対して値Tをとる．このことから補題により，

$$W_1, \cdots\cdots, W_n \vdash A$$

のパターンのすべての連式が導出されうる．その場合，$W_1, \cdots\cdots, W_n$ は，変数 $V_1, \cdots\cdots, V_n$ の否定されたものか，あるいは否定されていないものかである．2^n の可能な付値に対応して，2^n のこのような連式があるであろう．

例．'$P \& Q \to P$' はトートロジー的である．従って補題により，つぎの4つの連式のすべてが導出可能である．

(i) $P,\ Q \vdash P \& Q \to P$

(ii) $P,\ -Q \vdash P \& Q \to P$

(iii) $-P,\ Q \vdash P \& Q \to P$

(iv) $-P,\ -Q \vdash P \& Q \to P$.

定理としての A の証明を構成するためには，$V_1 \vee -V_1,\ V_2 \vee -V_2, \cdots\cdots, V_n \vee -V_n$（定理44）をつぎつぎに導入し，TI を n 回適用することからはじめる．それから，vE の適用のための準備として，$V_1,\ -V_1,\ V_2,\ -V_2, \cdots\cdots, V_n,\ -V_n$ を仮定する．補題からえられた 2^n の連式を用い，SI を 2^n 回適用することにより，それらの連式のいろいろの仮定からAを結論として導く．

最後に vE をつづけて適用[1]することによって，いかなる仮定にも依存しないA，すなわち定理としてのAが最終的にえられる．これによってメタ定理は証明される．

例（つづき）．'$P \& Q \to P$' の場合には，上に述べた証明はつぎのようになる．

	(1)	$P \vee -P$	TI 44
	(2)	$Q \vee -Q$	TI(S) 44
3	(3)	P	A
4	(4)	$-P$	A
5	(5)	Q	A
6	(6)	$-Q$	A
3, 5	(7)	$P \& Q \to P$	3, 5 SI (i)
3, 6	(8)	$P \& Q \to P$	3, 6 SI (ii)
4, 5	(9)	$P \& Q \to P$	4, 5 SI (iii)
4, 6	(10)	$P \& Q \to P$	4, 6 SI (iv)
5	(11)	$P \& Q \to P$	1, 3, 7, 4, 9 vE
6	(12)	$P \& Q \to P$	1, 3, 8, 4, 10 vE
	(13)	$P \& Q \to P$	2, 5, 11, 6, 12 vE

この例[2]から，どうして一般に vE の適用によって，Aが依存する仮定の数が次第に減って行き，排中律の代入例が最後に用いられるときには，全く仮定が残らなくなるのかということが明らかになるはずである．

メタ定理 III：すべてのトートロジー的連式は導出可能である．

証明．$A_1, \cdots\cdots, A_n \vdash B$ がトートロジー的連式であるとしよう．すると，われわれの知っている通り，それに対応する条件法，

$$A_1 \to (\cdots\cdots(A_n \to B)\cdots\cdots)$$

もまたトートロジー的である（第4節参照）．故に，メタ定理IIにより，この条件法はわれわれの規則から定理として導出されうる．それ故，与えられた連式はつぎのようにして，導出されうる．まず第1に，$A_1, \cdots\cdots, A_n$ を仮定しよう．TI により，対応する条件法を新しい行として導入する．MPP を n 回適用することによって，$A_1, \cdots\cdots, A_n$ からの結論としてBが導かれ，こうして求める連式が導出される．

系 **I**：任意の連式は，それがトートロジー的であるときまたそのときに限って導出可能である．

この系は，メタ定理IとIIIを結合したものに過ぎない．

命題計算のような論理的体系は，特定の種類のすべての表現が，そのなかで導出可能であるならば，完全である (complete) と言われる．特に，トートロジー的連式表現を，その特定の表現とするならば，メタ定理IIIから直ちにつぎの系がえられる．

系 **II**：命題計算は完全である．

前節とこの節とを比較すると，第4節で証明されたような無矛盾性 (consistency) の結果は，典型的に，ある種類の表現のみが（命題計算の場合には，トートロジー的連式表現のみが）導出可能であるということを意味するものであるが，一方いま証明されたような完全性 (completeness) の結果は，典型的に，ある種類のすべての表現が導出可能であるということを意味するものである．上の系Iにおけるように，両者を結合するならば，われわれの導出規則は，行き過ぎることはないが，十分なところまでは進むということがわかる．すなわち，われわれの導出規則は，正確にトートロジー的連式を導出することを可能にするものである．

それ故，命題計算を研究する2つの非常に違った方法，すなわち導出による方法と真理表による方法とは，結局一致する．真理表によってトートロジ

一的連式がその他のものから識別される．また導出によって導出可能な連式が識別される．しかしながら，いずれにしても，導出可能な連式の全体の数は同じであるという結果に終るのである．このことから，導出の方法の効用に関して，あるいは疑問が持たれるかもしれない．なぜならば，上に言ったように，真理表テストはまったく機械的に行なわれる．同じ仕事が機械的に行なえるときに，どうして証明を探し求めることにかかずろうのであろうか．

これに対しては幾通りかの答えができる．第1に，命題計算のレベルにおいてさえも，実際上，真理表テストは4つあるいはそれ以上の変数に対しては煩瑣なものになる．連式がトートロジー的ではないかと推定されるときには，証明を求める方がしばしばより容易なのである．第2に，証明の行は，多くの場合，われわれが日常よく注意しないで適用している推論の方法に従っているのである（この理由から，われわれの導出の方法は，自然演繹法〔natural deduction〕とよばれることがある）．それに対して，真理表テストはやや人工的な性格のものである．第3に，あるトートロジーを論理的原理ではないとして，拒否したいと思うなにかの根拠があるとするならば（たとえば，排中律はしばしば哲学者によって問題とされてきた），われわれの規則からの明示的な証明は，そのような拒否のためには，何が棄てられねばならないか，また何が保存されてよいか，ということを明らかにするであろう．しかるに真理表テストでは，そのようなことは明らかにならない．規則によるわれわれの方法は，結果の相互依存性について何ごとかを示すのに対して，真理表テストは，それぞれの連式表現に，個別的に適用されるのである．

つぎの2章において取り扱おうとする述語計算のような，より複雑なレベルの論理学においては，真理表による方法は無効となる．実際このレベルにおける表現を，妥当なものと不妥当なものにふるいわける機械的手段は存在しないことが知られているのである．それ故，そこでは，他の技術を用いることが必要となる．そして，実際，われわれは命題計算のための導出規則を引き継ぎ，新しい要求にかなうようにそれらを拡張するとともに，また他の

規則をつけ加えるであろう．このような意味において，命題計算は論理学の典型的なものではない．相対的に単純なために，それは機械的に扱われうるのである．他の論理学体系はそうではない．そこでは数学そのものにおけると同じく，体系の複雑さのためにテストは想像力の助けをかりたプロセスとなるのである．

注1）一般にそれは何回適用されるのであろうか．明敏な学生には，それが（$2^{n-1}+2^{n-2}+\cdots\cdots+1$）回で十分なことがわかるであろう．

2）起こりうる誤解を避けるために言い添えておく．'$P \& Q \rightarrow P$' はもちろん，こんな大騒ぎをしなくても，簡単に証明される．それは，2変数 P および Q のトートロジーの例としてここに引かれたに過ぎない――他のどのような例でも，たとえいかに長くて厄介なものであっても，同様に間に合ったのである．

第3章　述語計算　1

第1節　論理形式：「すべての」と「幾らかの」

われわれの抱負（第1章第1節参照）は，妥当な論証の条件を正確に述べるということである．そして読者に正しい謙虚さをもっていただくためには，いまこそ，これまでに達成されたことがいかにわずかなことに過ぎないかを見るべきときである．

つぎの2つの論証を考えてみよう．

(1)　彼が在宅するならば，彼の帽子は玄関にあるであろう．彼の帽子は玄関にはない．故に彼は在宅しない．

(2)　ナポレオンがシナ人であったならば，彼はアジア人であった．彼はアジア人ではなかった．故に彼はシナ人ではなかった．

命題計算の助けをかりて，どちらの論証も，導出可能な連式として示すことのできる共通のパターン，

(3)　$P \rightarrow Q, -Q \vdash -P$

をもっている故に，健全であるということが直ちにわかる．これまでに導出された多くの連式は，このように，非常に身近かな日常的論証のパターン，あるいは論理形式 (logical form) を示している．だが疑いもなく健全ではあるが，しかしその健全性がわれわれの現在もっている方法では全く明らかになることのない，やはり，身近かな多くの論証がある．本書のはじめに与えられた2つの論証を，読者に思い起こしていただこう．

(4)　トゥイーティは駒鳥である．いかなる駒鳥も渡り鳥では

ない．故にトゥイーティは渡り鳥ではない．

(5)　酸素は元素である．いかなる元素も分子ではない．故に酸素は分子ではない．

(1)と(2)について，われわれがその論理形式とよんだ共通なあるものが(4)と(5)にもある，ということには異論はない．しかるに命題計算の記法によって，それらについて書くことのできるただひとつの連式は，

(6)　$P, Q \vdash R$

であって，明らかにこれは不妥当な連式である．

(1)と(2)を，(4)と(5)に比較してみる価値がある．(1)と(2)においては，論証の結論が，第1の前提の前件として現われる命題の否定であることが認められ，第2の前提が第1の前提の後件の否定であることが認められる．このように認めた結果えられたものが(3)のパターンである．しかし(4)と(5)においては，そのような命題の再確認は行なわれない．2つの前提と結論はすべて異なっていて，その結果われわれの書くことができるのは(6)でしかありえないのである．(4)と(5)は健全なのであるから，それらが健全なのは命題の内部構造によってであるということになるが，これに反して，(1)と(2)が健全であることを示すには，命題の内部を見るまでもなく，命題そのものを単位と考えるだけで十分なのである．命題計算が妥当性を明らかにするのは，妥当性が命題の構造のみによって決まる場合である．そしてこのレベルでは，われわれの単位は命題そのものである．妥当性の条件を求めることをさらに先まで進めようとするならば，明らかに，いまわれわれに必要なのは，命題の内部へわけいり，その内部構造を明らかにすることを可能ならしめるような道具である．これらの道具は，この章と次の章の主題である述語計算（predicate calculus）によって与えられる．

上に(4)と(5)に取り組んだとき，それらの論理形式のつぎのような部分的な分析結果をえた．

(7)　mは性質Fをもつ．Fをもついかなるものも性質Gをも

たない．故にmはGをもたない．

われわれの新しい形式的言語では，固有名（「トゥイーティ」はすなわち鳥の固有名であり，「酸素」はすなわち化学元素の固有名である）に置き換えられる特殊な記号が明らかに必要である．このためには，(7)においてしたように，‘m’，‘n’，……… を用いることにしよう．また，性質表現あるいは述語（「駒鳥である」，「渡り鳥である」，「元素である」，「分子である」）に置き換えられるべき記号も必要である．これもまた(7)においてしたように，‘F’，‘G’，‘H’，………の大文字を用いることにしよう．‘m’，‘n’，………を固有名（proper names），‘F’，‘G’，………を述語文字（predicate-letters）とよぶ．

mは性質Fをもつ，と言うために，‘F’と‘m’をこの順序にならべて書くことに決める．すなわち，つぎのように書く，

$$Fm.$$

こうして，‘Fm’は固有名を主語とする多くの単文を表わすパターンとなる．たとえば，「ソクラテスは死ぬ」，「ナポレオンはシナ人である」，「勇気は望ましい」，等々．

mがGをもたない，と言うことはもはや簡単である．なぜなら，mはGをもつ，と言うために‘Gm’と書くのであるから，「mはGをもたない」と言うためには，これから先われわれは自由にそうすることになるであろうが，既に展開された命題計算から記号を借りて，つぎのように書く，

$$-Gm.$$

(7)の第1の前提と結論はこれによって間に合わせることができる．しかし第2の前提における「いかなるものも………ない」（nothing）という表現に対する記号はまだない．われわれは単純にこれを表わす記号（たとえば‘E’）を導入して，「FをもついかなるものもGをもたない」を‘E(FG)’と書くこともできよう．多かれ少なかれこういう方法が，アリストテレスに由来する伝統的論理学においては採用されていたのであった[1)]．現代の論理学においては，もっと柔軟性があって精密な記法が用いられるが，しかしそれは習得

するのもより難かしい．われわれは，「いかなるものも……ない」よりはむしろ「すべてのもの」を先に検討することによって，問題に間接的な経路から近づいて行こう．

「いかなる駒鳥も渡り鳥ではない」から「駒鳥であるという性質をもついかなるものも渡り鳥であるという性質をもたない」がえられた．同様に，「すべての駒鳥は渡り鳥である」から「駒鳥であるという性質をもつすべてのものは渡り鳥であるという性質をもつ」がえられる．'F' と 'G' を前と同じように用いて，

(8)　FをもつすべてのものはGをもつ．

がえられる．ここでなすべきことは，(8)が一種の条件法，つまり，

(9)　すべてのものは，それがFをもつならばGをもつ，

あるいは，恐らくよりよい言い方としては，

(10)　任意のものを選ぶとして，それがFをもつならば，それはGをもつ，

に等しいものであることを理解することである．FをもつすべてのものがGをもつ，と言うことは，どのような対象に対しても，それがFをもつならばそれはGをもつ，と言うのと同じである．すべての駒鳥は渡り鳥である，と言うことは，どのような対象を選ぶとしても，それが駒鳥であるならばそれは渡り鳥である，と言うのと同じである．[2)]

われわれは代数学から変数 (variables) 'x', 'y', 'z', ……… という便利な記号を採用して，(9)と(10)を記号的に表現することができる．(9)のかわりに，まずつぎのように書く．

(11)　任意のxに対して，xがFをもつならば，xはGをもつ．

「xはFをもつ」は無理なく 'Fx' と略記され，「xはGをもつ」も同様に 'Gx' に，そして「………ならば………」に対しては，以前と同様，'→' を用いる．こうしてつぎのように書かれる．

(12)　任意のxに対して，$Fx \rightarrow Gx$.

最後にわれわれは，「任意の x に対して」を'x'を括弧に入れて書くことにし，そして(8)の完全に記号的な表現として，つぎのものがえられる．

(13)　$(x)(Fx \to Gx)$.

変数という記号を採用することがいかに有効であるかは，進むにつれて次第に明らかとなって行くであろう．さしあたりは，それは，代名詞「それ」(it) に似たようなはたらきをするものと考えておけば十分であろう．(11)を(10)と比較すると，実際，(11)における'x'は，(10)における「それ」に2回置き換えられているのが見られる．(13)に現われる「任意の x に対して」の略記法'(x)'は，普遍量記号（全称記号，universal quantifier）とよばれる．

このように「FをもつすべてのものはGをもつ」は'$(x)(Fx \to Gx)$'となる．ところで，「FをもついかなるものもGをもたない」はどうであろうか．考えてみると，FをもついかなるものもGをもたないと言うことは，FをもつすべてのものはGを欠くと言うこと，あるいは明示的に条件法の形式で書くと，

(14)　任意のものを選ぶとせよ．それがFをもつならば，それはGをもたない，

と言うことにほかならない．これはこんどは，

(15)　任意の x に対して，$Fx \to -Gx$

となり，そして，

(16)　$(x)(Fx \to -Gx)$

となる．この最後のものは完全に記号的に表現されている．

より複雑な例として，つぎの命題を分析することが求められているとしよう．

(17)　いかなる人も医者でありそして魚屋であることはない．

性質表現による翻訳をうるために，まずつぎのように書き直す．

(18)　人であるという性質をもついかなるものも，医者であってそして魚屋であるという性質をもつことはない．

Fを人であるという性質とし，Gを医者であるという性質とし，Hを魚屋であるという性質としよう．その場合にはつぎの表現がえられる．

(19)　FをもついかなるものもGとHをもつことはない．

従って，

(20)　任意のものを選ぶとして，それがFをもつならば，それはGとHをもつことはない．

ここから，

(21)　任意のxに対して，$Fx \rightarrow -(Gx \ \& \ Hx)$，

ここから，

(22)　$(x)(Fx \rightarrow -(Gx \ \& \ Hx))$．

普遍量記号を用いる方法は，「すべての」(all, every)，「任意の」(any)，「すべてのもの」(everything) や，また「いかなるものも……ない」(no, none, nothing) といった語を含む多くの文を，それらが論証のなかに現われるときに，論理的記法に翻訳することを可能ならしめる．しかしながら，いまひとつのグループの慣用語が，推論の行なわれる場面において，大きな役割をはたす．そのグループの中心は「幾らかの」(some) である．たとえば，つぎの健全な論証を考察してみよう．

(23)　すべてのドイツ人は陽気である．幾らかの重罪人はドイツ人である．故に幾らかの重罪人は陽気である．

重罪人であることを‘F’，ドイツ人であることを‘G’，陽気であることを‘H’とおけば，第1の前提は明らかに‘$(x)(Gx \rightarrow Hx)$’によって表現される．しかしながら，第2の前提と結論をどのように取り扱えばよいのかは明らかでない．われわれはつぎのように考えてもよいであろう．幾らかの重罪人はドイツ人であると言うことは，いかなる重罪人もドイツ人ではないということはないと言うのと同じである．「いかなる重罪人もドイツ人ではない」が‘$(x)(Fx \rightarrow -Gx)$’となるのであれば，「いかなる重罪人もドイツ人ではないということはない」は‘$-(x)(Fx \rightarrow -Gx)$’となる．従ってわれわれはまた

普遍量記号の助けをかりて「幾らかの」を取り扱うこともできる.

この分析は完全に正しいけれども，「幾らかの」を取り扱う際には，特別の記号，すなわち存在量記号（存在記号，existential quantifier）を用いる方が，論証をやって行く上により便利なことがわかる.

ちょうど，

$$`(x)(\cdots\cdots)'$$

が「任意の x を選べ，そうすれば……」を意味するように，

$$`(\exists x)(\cdots\cdots)'$$

と書いて，「……であるような x が存在する」あるいは「……である対象 x が見出されうる」ということを意味するのである. '$(\exists x)(\cdots\cdots)$' は，少なくとも1つのものが……であるようなものである，ということを主張する. そこで，幾らかの重罪人はドイツ人であると言うことは，性質 F と性質 G をもつような少なくとも1つの対象が見出されうると言うことである.[3] 一般に

(24)　F をもつ幾らかのものは G をもつ，

と言うことは，あるものが F と G をもつと言うことと同じであり，従ってそれは，

(25)　x が F をもちそして x が G をもつような x が存在する，

となり，あるいは完全な記号的表現では，つぎのようになる.

(26)　$(\exists x)(Fx \,\&\, Gx)$.

いまひとつの，特に言っておいてよいほどに一般的な語法は，「F をもつ幾らかのものは G をもたない」あるいは「F をもつが G をもたないものが存在する」（「幾らかのフランス人は寛大でない」，「寛大でないフランス人が存在する」）である. これは明らかに，「x が F をもちそして x が G をもたないような x が存在する」，すなわち，

(27)　$(\exists x)(Fx \,\&\, -Gx)$,

となる.

「すべてのフランス人は寛大である」は一種の条件文として適切に記号化

されるので，これに同化してしまって，「幾らかのフランス人は寛大である」を，正しく '$(\exists x)(Fx \mathbin{\&} Gx)$' と記号化するかわりに，むしろ '$(\exists x)(Fx \rightarrow Gx)$' とするのは，よくある間違いである．しかし，'$(\exists x)(Fx \rightarrow Gx)$' は，それがフランス人であるならば，寛大であるようなあるものが存在することを主張するのであって，これは，かりにフランス人が存在しないとしても真であろう．しかるに「幾らかのフランス人は寛大である」は決してそうではない．

量記号を用いる記法への翻訳の仕事は，つぎのように要約されるであろう．第1に，性質についての文に翻訳し，そしてこれらの性質を表わすには述語文字を用いよ．第2に，変数を導入せよ．第3に，命題計算の結合記号と量記号を導入せよ，である．4つの最も一般的な形式の命題は，その第1の段階が完了したあとのものと，その最終的な翻訳とが，つぎの表に示される．

FをもつすべてのものはGをもつ	$(x)(Fx \rightarrow Gx)$
FをもついかなるものもGをもたない	$(x)(Fx \rightarrow -Gx)$
Fをもつ幾らかのものはGをもつ	$(\exists x)(Fx \mathbin{\&} Gx)$
Fをもつ幾らかのものはGをもたない	$(\exists x)(Fx \mathbin{\&} -Gx)$

伝統的論理学はこれらの4つの命題の形式を認めたが，それ以上の形式は認めなかった．その最も大きな制限は実際上，(恐らくは命題計算というものがあることを見逃がしていたことは別として)，他のいろいろの命題の形式に対する表現力をこのように欠いていることである．そして，変数および述語文字と組み合わされた，量記号の記法の長所のおもなものは，それがわれわれの文の分析力を著しく増すということである．第1に，われわれは性質のみならず関係をも取り扱うことができる．「フィリップ王子はチャールズ王子の親である」という文を考察してみよう．「フィリップ王子は寛大である」は，たとえば(「フィリップ王子」のかわりに 'm' を用いて) 'Gm' と翻訳されるが，これとは違って，新しい文は2つの名前を含んでいる．そして，1つの対象についてある性質が主張されるよりはむしろ，2つの対象の間に，

ある関係があることが主張されている．'n' を「チャールズ王子」のかわりに用いることにしよう．すると「mはnの親である」の略記法として，'Pmn' と書くことができる．'Pmn' は真であろうが，'Pnm'（「チャールズ王子はフィリップ王子の親である」）は偽であろう．従って，２つの固有名が述語文字のあとにつづくときは，順序が重要となる．

１つの名前があとにつづく述語文字は性質を表現する．２つの名前があとにつづく述語文字は関係を表現する．この方法で取り扱うことができる，関係について述べる日常言語の文の例にはつぎのようなものがある．「mはnを愛する」，「mはnよりも大である」，「mはnの南にある」，「mはnのまたいとこである」．他動詞（少なくとも，目的語があとにつづいているとき），比較級の形容詞，相対的位置の表現，家族関係を表わす用語は，とりわけ，関係を表現したりあるいは関係を表わす表現のなかに現われたりすることがしばしばである．

第２に，この拡張された述語文字の用法を，量記号と組み合わせることができる．さしあたって，われわれの変数'x'，'y'，'z'が（代数においてそれらが数を変域とするものと理解されるように）ひとびとを変域とするものと考えよう．すると，「すべてのもの」のかわりに「すべての人」，「あるもの」のかわりに「ある人」と読むことができる．そこで，'Pmn' に「mはnの親である」という解釈を与えて，「チャールズ王子は親をもっている」を，

(28)　$(\exists x)Pxn$

と表現することができる．その場合，nはチャールズ王子である．これはたんに，ある人がチャールズ王子の親であると言うに過ぎない．フィリップ王子は子供をもつ，と言うためには，

(29)　$(\exists x)Pmx$

と書く．その場合，mはフィリップ王子であって，(29)は，フィリップ王子がその親であるようなある人が存在する，と言うのである．ここでもまた，順序が本質的である．なぜならば，同じ解釈の下に，$(\exists x)Pnx$（「チャールズ

王子がその親であるようなある人が存在する」）は，この書物を書いている当時においては，偽であるのに対し，(28)は真だからである．同様に，$(\exists x)Pxm$ は，(29)と同じように真ではあるが，フィリップ王子の子孫によりはむしろ祖先に関わるものである．

第3に，われわれは同じ文のなかで，普遍量記号と存在量記号を組み合わせることができる．'$(\exists x)Pxn$' は，チャールズ王子について，彼が親をもつことを言っている．すべての人が親をもつ，と言いたいのだとしよう．われわれは，無理なくつぎのように書く．

(30)　$(y)(\exists x)Pxy$

（「任意の y を選ぶとせよ．すると x が y の親であるような x が存在する」）．言うまでもなく，これはつぎのものと注意ぶかく区別されねばならない．

(31)　$(y)(\exists x)Pyx$.

これはむしろ，すべての人がある人の親であることを主張しているのであって，明らかに例外のある一般化である．また，量記号の順序がここでは，'x' と 'y' の順序と同様，文の意味にとって重要であることを見抜くことはきわめて大切である．たとえば，

(32)　$(\exists y)(x)Pyx$

は，ある人はすべての人の親であるという，明らかに偽なることを主張しており，また

(33)　$(\exists y)(x)Pxy$

は，ある人がすべての人を親としてもつということを主張しているが，これはなおさら明らかに偽である．

以上の4つの例において，'x' と 'y' という異なった変数を用いることは，要求された意味を表わすためにきわめて重要である．たとえば，'$(\exists x)Pxx$' と言えば，ある人が自分自身の親である，と言うことになり，'$(x)Pxx$' と言えば，すべての人は自分自身の親である，と言うことになるであろう．(30)を変数を用いないで言い表わせば，「任意の人に対して，その人（前者）の親

であるような人（後者）が存在する」と言う必要がある．異なった変数は，「前者」や「後者」を簡単な仕方で取り扱うことを可能にし，このことはまた，変数と代名詞の間の類似性を示すものである．

述語文字のあとにおくものを，2つの名前または変数までにしておかねばならない理由はない．たとえば，「オックスフォードはロンドンとストラトフォードの間にある」を，「オックスフォード」を‘m’，「ロンドン」を‘n’，「ストラトフォード」を‘o’，そして間にあるという関係を‘B’とおいて，記号的に翻訳すれば，$Bmno$ と書くことができる．実際この書物では，2つ以上の対象を含む関係を取り扱うことはめったにないであろう．しかし理論的には，われわれの述語文字のあとには，任意の（有限な）数の名前あるいは変数がつづいてよいのである．

量記号を用いる例を，次第により複雑な場合へと進みながら，なお幾つか挙げることによってこの節を終ろう．

つぎの文を考えてみよう．

(34)　すべての少年はある少女を愛する．[4)]

この文には多義性が含まれていることが知られる．これは，(i)すべての少年に愛されるあるひとりの（非常に幸運な）少女が存在する，という意味かも知れないし，あるいは(ii)すべての少年に対して，彼が愛するある（さいわい別々の）少女がみつかりうる，という意味かも知れない．それぞれの解釈に対して異なった記号的翻訳がえられる．（量記号の記法のもうひとつの長所は，この種の多義性をはっきりさせることである）．少年であるという性質を表わすのに‘B’，少女であるという性質を表わすのに‘G’，愛するという関係を表わすのに‘L’を用いることにしよう．すると，(i)は，「Gx であって，そして x はすべての少年によって愛されるような x が存在する」となる．「x はすべての少年によって愛される」を翻訳するために，それを「すべての少年は x を愛する」――「すべての y に対して，y が少年であるならば y は x を愛する」――と考える．このようにして，部分を結合することによっ

て，つぎの記号化がえられる．

(35)　$(\exists x)(Gx\ \&\ (y)(By \rightarrow Lyx))$.

他方，(ii)は，「すべてのxに対して，Bxならばxはある少女を愛する」となり，また「xはある少女を愛する」と言うためには，「Gyであってそしてxがyを愛するようなyが存在する」と言うのである．故に(ii)の記号化はつぎのようになる．

(36)　$(x)(Bx \rightarrow (\exists y)(Gy\ \&\ Lxy))$.

(i)の全体的構造は，「Gをもつ幾らかのものはHをもつ」であるが，Hはこの場合は，すべての少年によって愛されるという複雑な性質である．(ii)の全体的構造はしかしながら，「BをもつすべてのものはHをもつ」であり，Hはこの場合は，ある少女を愛するという複雑な性質である．(35)と(36)は注意ぶかく比較対照されねばならない．

つぎに下の文を考えてみよう．

(37)　すべての綺麗な少女は水夫を愛する．

いまひとつの多義性がこの文には見出される．この文は，(i)すべてのxに対して，xが綺麗な少女であるならば，xはある水夫を愛する，の意味なのであろうか，それとも(ii)すべてのxに対して，xが綺麗な少女であるならば，xはどのような水夫をも愛する，の意味なのであろうか．もし(i)ならば，綺麗であることを‘N’，少女であることを‘G’，そして水夫であることを‘S’とおいて，つぎの記号化がえられる．

(38)　$(x)(Nx\ \&\ Gx \rightarrow (\exists y)(Sy\ \&\ Lxy))$.

他方，もし(ii)ならば，つぎの記号化がえられる．

(39)　$(x)(Nx\ \&\ Gx \rightarrow (y)(Sy \rightarrow Lxy))$.

(実際は，(37)は(ii)を意味するのではあるまいかとわたしは思う．)

(33)や(39)のように，条件法の前件として連言が現われるのは，文法的主語にかかる関係節をもった全称文（‘all’-sentences）の分析の典型的な形式である．たとえば，「GをもつところのFをもつすべてのものはHをもつ」はつぎの

ようになる.

(40)　$(x)(Fx \mathbin{\&} Gx \rightarrow Hx)$.

「を除く」(except) ではじまる句も しばしば同様の取り扱いを 必要とする. たとえば,「チワーワを除くすべての犬は寒気を好む」は, つぎのようになるであろう.

(41)　$(x)(Dx \mathbin{\&} -Cx \rightarrow Lx)$.

この場合,'D'は犬であること,'C'はチワーワであること, そして'L'は寒気を好むことを表わす. というのは,「チワーワを除く犬」は「チワーワでない犬」の意味だからである.

「任意の」(「どのような」any) という語には, つねに注意がはらわれねばならない. 文頭におかれる場合には,「任意の」は通常「すべての」の役割を演じ, その意味で取り扱われうる. しかし「ジョンはどのような少女をも好かない」はもちろん,「ジョンはいかなる少女をも好かない」の意味であって, つぎのように記号化される.

(42)　$(x)(Gx \rightarrow -Lmx)$.

この場合,'G'は少女であること,'L'は好くという関係, そして'm'はジョンを表わす.

「のみ」(only) という語が出てくる場合には, 通常何度も注意ぶかく考えてみる必要がある. 人間のみがウィスキーを飲むと言うことは, 任意のxに対して, xが人間であるときに限ってxはウィスキーを飲むと言うことであり, これは, 任意のxに対して, xがウィスキーを飲むならばxは人間である(「PであるときにのみQである」〔only if P then Q〕は「QならばPである」〔if Q then P〕と同値である) と言うのと同じであり, これはもちろん, すべてのウィスキーを飲むものは人間である, と言うのと同じである. 一般に,「FをもつもののみがGをもつ」は「すべてのGをもつものはFをもつ」を意味する. 従って,「ナット・ステーキを食べる人のみが菜食主義者である」はつぎのようになる.

(43)　$(x)(Vx \to Mx \,\&\, Ex)$.

この場合，'V' は菜食主義者であること，'M' は人であること，'E' はナット・ステーキを食べることを表わす．このように記号化される理由は，「すべての菜食主義者はナット・ステーキを食べる人である」とそれが同じ意味だからである．他方，「ナット・ステーキを食べるのはひとり菜食主義者のみである」(*The only* men who eat nut steaks are vegetarians) は「すべてのナット・ステーキを食べる人は菜食主義者である」と同じ意味であり，つぎのように記号化される．

(44)　$(x)(Mx \,\&\, Ex \to Vx)$.

これほどのことが，ただ 'the' が現われることによって決まってくるのである．

日常言語の文から述語計算の文への翻訳のためには，一般にあたまが柔軟なことが必要である．なんら確定的な規則があるわけではなく，量記号に十分に馴れるまでには，練習を積むことが必要である．そこに含まれている仕事は翻訳の仕事には違いないけれども，しかしそこへ翻訳が行なわれる形式言語は，自然言語のシンタックスとは幾らか違ったシンタックスをもっており，また限られた術語——論理的結合記号，変数，固有名，述語文字，および2つの量記号——しかもたない．その言語のおもな長所は，その記法上の制限にもかかわらず，非常に広範な表現能力をもっていることである．正確にどれだけ広範なのかは，話が進むに従って明らかになるであろう．

以下の議論のあるものを簡潔にするであろう術語を，最後にひとつ挙げておこう．任意の対象に対してこれこれのことが成り立つ，ということを主張する命題を，普遍的命題 (universal proposition) とよぶことに決めよう．従って，普遍的命題は，述語計算において，普遍量記号ではじまる文によって表現されるであろう．そして，これこれのことが成り立つような対象が存在する，ということを主張する命題を，存在命題 (existential proposition) とよぶことに決めよう．従って，存在命題は，われわれの記号法においては，存在

量記号ではじまる文によって表現されるであろう．

練　習　問　題

1　つぎの文を述語計算の記法に（括弧内に示された文字を，述語文字および固有名として用いて）翻訳することにより，その論理形式を示せ．

(*a*)　スーザンはそそっかしい　('*F*', '*m*')
(*b*)　ジャネットはそそっかしい　('*F*', '*n*')
(*c*)　幾らかの女はそそっかしい　('*W*', '*F*')
(*d*)　すべての女はそそっかしい　('*W*', '*F*')
(*e*)　女のみがそそっかしい　('*W*', '*F*')
(*f*)　いかなる男もそそっかしくない　('*M*', '*F*')
(*g*)　幾らかの男はそそっかしくない　('*M*', '*F*')
(*h*)　ジョンはそそっかしくない　('*F*', '*m*')
(*i*)　ブルータスはシーザーを殺した　('*K*', '*m*', '*n*')
(*j*)　ある人はシーザーを殺した　('*K*', '*n*')
(*k*)　ブルータスはある人を殺した　('*K*', '*m*')
(*l*)　ある人はある人を殺した　('*K*')
(*m*)　ある人は自殺した　('*K*')
(*n*)　いかなる人も自殺しなかった　('*K*')
(*o*)　ある人はすべての人を殺した　('*K*')
(*p*)　ある人はすべての人によって殺された　('*K*')
(*q*)　ロンドンとストラトフォードの間に町がある　('*T*', '*B*', '*m*', '*n*')
(*r*)　すべての女は犬を飼っている　('*W*', '*D*', '*O*')
(*s*)　幾らかの犬はすべての女が好きである　('*D*', '*W*', '*L*')
(*t*)　すべてのそそっかしい女は犬を飼っている　('*F*', '*W*', '*D*', '*O*')
(*u*)　すべての女はそそっかしい犬を飼っている　('*W*', '*F*', '*D*', '*O*')

(*v*)　ファイドーはそそっかしい女が好きである　('*m*', '*F*', '*W*', '*L*')

(*w*)　幾らかの犬はそそっかしい女が好きである　('*D*', '*F*', '*W*', '*L*')

(*x*)　幾らかの犬はそそっかしい女のみが好きである　('*D*', '*F*', '*W*', '*L*')

(*y*)　幾らかの犬はいかなるそそっかしい女も好きでない　('*D*', '*F*', '*W*', '*L*')

(*z*)　幾らかの犬はそそっかしくない女のみが好きである　('*D*', '*F*', '*W*', '*L*')

注意：問題の後半の文の幾つかは多義的であり，２通りの翻訳を必要とする．

注1）より十分な議論については，第4章第4節を見よ．

2）証明はつぎの通りである．第1に，すべての駒鳥は渡り鳥であるとしよう．そして任意にある対象，たとえば干し草の山を選ぶとしよう．すると，その干し草の山について，それが駒鳥であるならばそれは渡り鳥である，ということは真である．逆に，すべての駒鳥が渡り鳥であるということはないとしよう．すると，ある駒鳥は渡り鳥ではない．いま，1つの対象を選ぶとしよう．すると，少なくともこの対象に対して，それが駒鳥であるならばそれは渡り鳥である，ということは真ではない．このようにして，一般に，(8)は，(9)および(10)と正確に同じ状況の下において真および偽である．

3）つねに論理学においては，「幾らかの」は「少なくとも1つの」を意味するものと理解する．たとえば，「幾らかの重罪人はドイツ人である」は，ドイツ人の重罪人が1人のみいるならば真と考えられるとともに，すべての重罪人がドイツ人である場合にもまた真と考えられる．「少なくとも2つ」を表現するための方法の展開については，第4章第3節を見よ．

4）この魅力的な例は，ピーター・ギーチ氏によるものである．

第2節　普遍量記号

前節では新しい形式的言語の予備的スケッチが与えられた．そこでいまやその言語で表現される論証をテストする問題にむかうことができる．われわれの言語の一部分は命題計算そのものにほかならないから，述語計算のなかへは，命題結合記号と命題変数が，必要に応じて引き継がれる――われわれの以前の規則はすべて，それらが新しい記法に拡張されるという了解の下に，

役立てられるのである．しかし論証のなかの量記号の取り扱いに対しては，規則を付け加える必要がある．事実，それは4つ——普遍および存在量記号に対する導入と除去の規則——である．まず普遍量記号から考えよう．

普遍量記号に対する除去規則は，ある結論を確立するための前提としての普遍的命題の用法に関わり，一方，導入規則は，普遍的命題を結論とするためには何が要求されるかに関わる．‘&’に対する導入と除去の規則を記憶しておくと役に立つ．というのは，つぎの注意が示すように，‘&’と普遍量記号との間には密接な類似性があるからである．

量記号を含む特定の論証においては，われわれは通常，話の世界 (universe of discourse) とよばれる，対象の特定のグループを念頭にもっている．たとえば，代数学において，変数‘x’，‘y’，‘z’，……は数を変域とすると理解されていて，その結果われわれの話の世界はここではすべての数の集合である．また，前節における(28)−(33)の議論においては，われわれの話の世界をすべての人間の集合にはっきりと限定したのであった．実際上，われわれの話の世界とは，一般に，変数‘x’，‘y’，‘z’，……の変域として了解されるものにほかならない．

例として，われわれの話の世界が，‘m’，‘n’，そして‘o’という固有名をもつ正確に3つの対象（それがどういう物であるかは問題ではない）を含むと仮定しよう．すると，すべてのものは性質Fをもつ，ということをこの世界に対して主張することは，mがFをもちそしてnがFをもちそしてoがFをもつということを主張することと同じである．従って，

(1)　$(x)Fx$

は，直観的に，この世界において，3つの連言項からなるつぎの複合的連言と同値であることがわかる．

(2)　Fm & Fn & Fo.

さて，&E の自明な拡張によって，(2)からの結論として，連言項 Fm，Fn，Fo の任意の1つを，個別的に導出できると考えるのは自然であろう．同様に，

普遍量記号の除去の規則 (Rule of universal quantifier elimination) 〔UE〕は，任意の特定の対象がFをもつことを，すべてのものがFをもつという前提から推論することを許す．$(x)Fx$ のような命題を主張することは，一般に，圧縮された仕方で，複合された連言を主張することであるということが知られたら，UE の規則は &E の自然な拡張であることがわかる．

実際，与えられた世界のすべての対象がわれわれの知っている名前をもち，そしてそれらは有限個しかないとすれば，その世界についての普遍的命題はつねにそのような複合的連言によって置き換えられるであろう．普遍量記号が必要となるのは，これらふたつの要求がつねに満たされるとは限らないからである．たとえば，すべての自然数[1)]はある性質Fをもつ，と言いたいことがあろう．これは，0はFをもち，そして1はFをもち，そして2はFをもち，等々と言うのと同じである．しかし，無限に多くの数が存在するので，求める連言を現実に完成することはわれわれにはできない．そこでその仕事をするために量記号に助けを求めるのである．われわれの話の世界は大きさが無限かも知れないから，普遍的命題は複合された連言と同値であるとは言えないが，しかし‘&’との類比が直観的に大へん助けになることは事実である．

従って UE に対する根拠づけは，すべてのものがある性質をもつならば，任意のものがそれをもたねばならない，ということであり，そして UE は $(x)Fx$ から，Fm や Fn のような結論へ進むことを，また $(x)(Fx\rightarrow Gx)$ から $Fm\rightarrow Gm$ や $Fn\rightarrow Gn$ へ進むこと（すべてのものが，FをもつならばGをもつようなものであるならば，特定の場合に，mがFをもつならばmはGをもち，nがFをもつならばnはGをもつ）を可能ならしめる．規則は，つぎの初等的連式の証明において例示されている．

100　$Fm, (x)(Fx\rightarrow Gx)\vdash Gm$

1	(1)	Fm	A
2	(2)	$(x)(Fx\rightarrow Gx)$	A
2	(3)	$Fm\rightarrow Gm$	2 UE

1, 2　(4) Gm　　　1, 3 MPP

100 は論理学では有名なつぎの論証に見られるような，明らかに健全な論証の形式を示している.

(3)　ソクラテスは人間である．すべての人間は死すべきものである．故にソクラテスは死すべきものである.

('m' はソクラテス，'F' は人間であること，そして 'G' は死すべきものであること，を表わすものとする.）われわれはいまや，トゥイーティと酸素の論証（前節の(4)と(5)）が妥当であることを示すこともできる立場にある．それらに共通の形式（前節の(7)を参照）はつぎの連式として証明される.

101　$Fm, (x)(Fx \rightarrow -Gx) \vdash -Gm$

1	(1)	Fm	A
2	(2)	$(x)(Fx \rightarrow -Gx)$	A
2	(3)	$Fm \rightarrow -Gm$	2 UE
1, 2	(4)	$-Gm$	1, 3 MPP

(3)の行における UE の適用は，100 の証明における同じ行でのそれの適用と正確に同じである．すなわち，すべてのFをもつものがGを欠くならば，特定の場合として，mがFをもつならば，mはGを欠く.

普遍量記号の導入の規則 (Rule of universal quantifier introduction)〔UI〕は，結論として普遍的命題を確立しようとするものである．'&' とのアナロジーによって，たとえばわれわれの先程の3つの対象の世界に対して，すべてのものがFをもつということを確立するためには，まずmがFをもつこと，そしてnがFをもつこと，そしてoがFをもつことを確立しなければならない．すると，&I の自明な拡張によって，すべてのものがFをもつということが言える．しかしながら，われわれの世界が無限に大きいか，あるいは世界のなかのすべての対象の名前がわれわれに知られていないかするならば，この技術は役に立たない．明らかに新しい方法が必要なのである.

ユークリッドが，すべての三角形がある性質をもつことを証明しようとす

るときに，どのようにするかを思い出してみよう．まずかれは「ABCを三角形とする」ことからはじめる．そしてABCが問題になっている性質をもつことを証明する．しかるのち彼は，すべての三角形がその性質をもつと結論するのである．[2)] この場合にABCとは何であろうか．それが何かの三角形の固有名でないことは確かである．なぜならその場合には，結論は帰結しないであろうからである．たとえば，フルシチョフは禿げ頭であるとしても，そこから，すべての人が禿げ頭であるということは帰結しない．'ABC'を任意に選ばれた三角形，すなわち，特定の三角形であるには違いないけれども，どれでも人が選びたいと思うものの名前である，とみなすのが自然である．なぜならば，任意に選ばれた三角形がFをもつことを示しうるならば，すべての三角形がFをもつという結論を健全に導くことができるからである．

それ故，話の世界のなかの任意に選ばれた対象の名前（固有名ではない）として'a'，'b'，'c'，……という文字を導入し，それらを簡単のため，任意の名前 (arbitrary names) とよぶ．その場合には，後に示される重要な制限を付して，Fa（任意に選ばれた対象がFをもつ）ということを示しうるならば，$(x)Fx$ ということを結論しうる．

実際上，Fa の証明は，求める「連言」$(x)Fx$ におけるすべての，そこに含まれているべき連言項の証明に等しい．上述の3つの対象から成る世界においては，Fa を証明することは，Fm, Fn, および Fo を証明することである．なぜならば，われわれはmを任意に選ばれたaととることができ，またnも，そしてoも，そうとることができるからである．世界が無限に大きい場合には，Fa を証明することは，無限に多くの連言項を証明することに等しい．なぜならば，われわれはaとして，世界のどの対象をでも選ぶことができるからである．

従ってUIに対する根拠づけは，ある制限を付して，任意に選ばれた対象がある性質をもつことが示されうるならば，すべてのものはその性質をもたねばならないということであり，そしてUIは，Fa あるいは Fb のような

前提から，$(x)Fx$ という結論へ進むことを，また $Fa \to Ga$ あるいは $Fb \to Gb$ から $(x)(Fx \to Gx)$ へ進むこと（任意に選ばれた対象が F をもつならばそれはGをもつ，とするならば，すべてのFをもつものはGをもつ）を可能ならしめるであろう．新しい文字 'a'，'b'，'c' の採用によって，UE の自然な拡張が行なわれる．たとえば，$(x)(Fx \to Gx)$ から $Fm \to Gm$ のみならず，$Fa \to Ga$，$Fb \to Gb$，等々もまた結論されうるのである（世界から任意に選ばれた対象は，結局その世界における特定の対象なのであるから，その結果，すべてのものについて成り立つことは，それらについてもまた成り立つのである）．規則 UI と UE のこの拡張は，いずれもつぎの証明において例示されている．

102　$(x)(Fx \to Gx), (x)(Gx \to Hx) \vdash (x)(Fx \to Hx)$

1	(1)	$(x)(Fx \to Gx)$	A
2	(2)	$(x)(Gx \to Hx)$	A
1	(3)	$Fa \to Ga$	1 UE
2	(4)	$Ga \to Ha$	2 UE
1, 2	(5)	$Fa \to Ha$	3, 4 SI(S) 1.2.1(i)
1, 2	(6)	$(x)(Fx \to Hx)$	5 UI

$(x)(Fx \to Hx)$ を証明するために，$Fa \to Ha$ を証明することをめざす（すべてのFをもつものは H をもつ，ということを証明するために，Fをもつ任意に選ばれた対象は H をもつ，ということを証明しようとする）．仮定(1)および(2)から，新しく拡張された形式での UE により，(3) $Fa \to Ga$ および (4) $Ga \to Ha$ が導かれる．求める $Fa \to Ha$ はいまや命題計算の推論によって帰結するが，その推論の段階は，第1章の連式のかたちをとっているので，これをわれわれは SI としてここに略記するのである．（厳密に言うと，われわれは述語計算に対して，SI が導出された規則としてえられることをまだ証明していない．しかし第2章第2節におけるわれわれの証明の新しい形式言語への拡張は，事実直ちにえられるのである．）この証明は，仮定も結論も

普遍量化されている，典型的な述語計算の導出である．すなわち，普遍量記号を仮定から除去し，変数を任意の名前に変え，命題計算を適用し，そして最後に UI によってふたたび普遍量記号を導入するのである．つぎにいまひとつの例を挙げよう．

103　$(x)(Fx\to Gx), (x)Fx \vdash (x)Gx$

1	(1)	$(x)(Fx\to Gx)$	A
2	(2)	$(x)Fx$	A
1	(3)	$Fa\to Ga$	1 UE
2	(4)	Fa	2 UE
1, 2	(5)	Ga	3, 4 MPP
1, 2	(6)	$(x)Gx$	5 UI

$(x)Gx$ を UI によって証明するために，われわれは Ga を求める．これは MPP によって，UE によって仮定から導かれる $Fa\to Ga$ と Fa とから帰結する．

既に指摘したことであるが，誤謬を避けようとすれば，UI の自由な使用にある制限を加えなければならない．つぎの例はその理由を示す助けとなるであろう．たとえば，幾何学の文脈において，ある図形 a を任意に選ぶと仮定しよう．そして，(i)それは鋭角である（すなわち，そのいかなる角も直角と同じ大きさでない），また(ii)それは直線で囲まれている（すなわち，それは直線によって形成されている）と仮定しよう．その場合には，初等幾何学の推論によって，a は三角形であると結論することができる．(i)を 'Aa' によって，(ii)を 'Ra' によって表現し，また結論を 'Ta' によって表現すれば，Ta が Aa および Ra から帰結する，ということになる．故に，CP を適用することによって，Aa が与えられるならば，$Ra\to Ta$ である．しかるに，いま UI を適用すれば，Aa から $(x)(Rx\to Tx)$ を結論することができる——任意に選ばれた鋭角の図形が与えられるならば，すべての直線で囲まれた図形は三角形である．結論は明らかに偽である．しかも鋭角の図形を選びさえ

するならば，われわれは前提を真ならしめることができるのである．

ここに含まれている誤謬がどういうものであるかは，つぎのように言えばよいであろう．すなわち，われわれが $Ra \to Ta$ という結論から $(x)(Rx \to Tx)$ へと進む権利がないのは，その結論が Aa という，a に関する特殊な仮定に基づいているからにほかならない．なるほどわれわれが任意に選んだ図形 a が直線に囲まれているならば，それは三角形である，ということは証明された．しかしそれは，a が鋭角でもあるという仮定に基づいて，はじめて証明されたのである．a についての命題から普遍的結論へと進む場合に，UI を適用するに先立って，a についての命題が依存している仮定には，a そのものに関する特殊な仮定が含まれていないことを確かめておくならば，この誤謬は避けることができる．言い換えると，UI を適用するに先立って，結論が依存している仮定のどれにも，'a' が現われないということを確かめておくべきなのである．これが以上に示された推論の誤まった進みをうまく封じるのである．なぜならば，結論 $Ra \to Ta$ は，a が言及されている仮定 Aa に基づくものであって，従って UI は適用できないからである．

上に与えられた UI の適用の例はこの制限に従っているのであって，読者はみずからこれをチェックしていただきたい．たとえば，103の証明において，$(x)Gx$ をうるために Ga という結論へ UI を適用した．しかし Ga が依存している仮定は，$(x)(Fx \to Gx)$ と $(x)Fx$ であった．そのいずれにも'a'は現われないのである．実際にあたってこの制限を守ることは容易である．すなわち，'$(x)(\cdots\cdots x \cdots\cdots)$' をうるために '$\cdots\cdots a \cdots\cdots$' へ UI を適用する前に，'$\cdots\cdots a \cdots\cdots$' が依存する仮定に目を通し，'$a$' がそれらのなかのどこにも現われないことを確かめればよいのである．

誤謬の最も直接的なかたちは，つぎの「証明」に見られる．

1	(1)	Fa	A
1	(2)	$(x)Fx$	1 UI

たとえば，'F' を奇数であることと解釈し，数の世界において，任意に奇数，

たとえば3を選ぶとしよう．その結果は Fa が真となる．しかしここから，すべての数は奇数であるということ——これは偽であるが——は明らかに帰結しない．(1)から(2)への進みは，制限によってはばまれる．なぜならば，(1)はそれ自身に依存し，そしてそのなかには‘a’が現われるからである．

われわれはこの節においては規則 UE および UI の正確な定式化を与えることはしなかった．このことは，第4章第1節まで延期される．そこにおいてわれわれは，第2章第1節における，命題計算に対する形成規則と類似した，述語計算に対する詳細な形成規則を示すことになる．しかしいま与えた直観的な説明によっても，学生は本文に与えられた初等的証明を理解し，また本文につづく練習問題を解くことができねばならない．もっとこみいった問題を取り扱うときにはじめて，量記号の規則を正確に述べることが必要となる．

練　習　問　題

1　つぎの論証を述語計算の記号に翻訳し，そしてUEと命題計算の規則によってその妥当性を示せ．

(a)　ジャックはフランス人である．すべてのフランス人はけちである．故にジャックはけちである．（‘m’，‘F’，‘N’）

(b)　ジャックはけちである．いかなるフランス人もけちでない．故にジャックはフランス人でない．（‘m’，‘N’，‘F’）

(c)　ウィリアムはフランス人でない．フランス人のみがどん欲である．故にウィリアムはどん欲でない．（‘n’，‘F’，‘A’）

(d)　すべての男の看護人は思いやりがある．ウィリアムは思いやりがない．ウィリアムは男である．故にウィリアムは看護人でない．（‘M’，‘N’，‘S’，‘n’）

(e)　パリジャンを除くすべてのフランス人は親切である．ジャックはフランス人である．ジャックは親切でない．故にジャックはパリジャンである．（‘F’，‘P’，‘K’，‘m’）

2　(i)　UE と UI を命題計算の規則とともに用いて，つぎの連式の妥当性を示せ．

(a)　$(x)(Fx \rightarrow Gx), (x)(Gx \rightarrow -Hx) \vdash (x)(Fx \rightarrow -Hx)$

(b)　$(x)(Fx \rightarrow -Gx), (x)(Hx \rightarrow Gx) \vdash (x)(Fx \rightarrow -Hx)$

(c)　$(x)(Fx \rightarrow Gx), (x)(Hx \rightarrow -Gx) \vdash (x)(Fx \rightarrow -Hx)$

(d)　$(x)(Gx \rightarrow -Fx), (x)(Hx \rightarrow Gx) \vdash (x)(Fx \rightarrow -Hx)$

(e)　$(x)(Fx \rightarrow Gx) \vdash (x)Fx \rightarrow (x)Gx$

(f)　$(x)(Fx \vee Gx \rightarrow Hx), (x)-Hx \vdash (x)-Fx$

(ii)　つぎの論証のそれぞれに対して，上の連式(a)－(d)のどれが，その論理形式を示し(そうして論証の妥当性を確立し)ているかを述べよ．

(a)　いかなるドイツ人もフランス人でない．すべてのフン族はドイツ人である．故にいかなるフランス人もフン族でない．

(b)　いかなるフランス人も狂信的でない．すべてのフン族は狂信的である．故にいかなるフランス人もフン族でない．

(c)　すべてのフン族は狂信的である．いかなるフランス人も狂信的でない．故にいかなるフン族もフランス人でない．

(d)　すべてのドイツ人は狂信的である．いかなる狂信者も俳優的でない．故にいかなるドイツ人も俳優的でない．

注1）自然数というのは，数0，1，2，3，etc. のことである．それらは負ならざる整数 (non-negative integers) とよばれることもある。そして正の整数 (positive integers) とは，数1，2，3，etc. である．

2）たとえば，Euclid, *The Elements*, I, Propositions 16–21 を見よ．

第3節　存在量記号

普遍量記号が ‘&’ に関係があるのと同じように，存在量記号は ‘v’ に関係がある．前節に論じられた3つの対象から成る世界において，‘$(x)Fx$’ は ‘$Fm \& Fn \& Fo$’ と同じことを意味した．さて，この世界において，少なくと

も1つのFをもつものxが存在する，と言うことは，mがFをもつかあるいはnがFをもつかあるいはoがFをもつかである，と言うことと同じである．故に，ここでは '$(\exists x)Fx$' は '$Fm \vee Fn \vee Fo$' と同じことを意味する．たとえば自然数の世界のような，無限に大きい世界の場合には，Fをもつ数が存在する，あるいはある数がFをもつ，と言うことは，0がFをもつかあるいは1がFをもつかあるいは2がFをもつかあるいは……と言うことと同じである．「無限の連言」を書くことはできないから普遍量記号が必要であるように，「無限の選言」を書くことはできないから存在量記号が必要なのである．

従って，存在量記号に対する2つの規則は，規則 vI および vE の拡張と見ることができる．存在量記号の導入の規則 (Rule of existential quantifier introduction)〔EI〕をまず取り上げよう．$(\exists x)Fx$ のような結論を確立するための自然な前提は，Fm のような命題である．Fをもつ特定の対象が与えられるならば，あるものがFをもつと結論することができる．たとえば，われわれの3つの対象の世界において，Fm, Fn, Fo の任意の1つが与えられるならば，$(\exists x)Fx$ を結論することができる．あるいは，無限の対象から成る場合には，Fをもつ任意の特定の自然数が与えられるならば，ある数がFをもつと結論することができる．存在量記号が選言のなかまであることを考えると，規則 vI とのアナロジーは明らかなことなのでなければならない．

従って EI に対する根拠づけは，特定のものがある性質をもつならば，あるものがそれをもつということであり，EI は Fm や Fn のような前提から $(\exists x)Fx$ という結論へ進むことを，また $Fm \mathbin{\&} Gm$ や $Fn \mathbin{\&} Gn$ から $(\exists x)(Fx \mathbin{\&} Gx)$ という結論へ進むこと（mがFとGをもつならば，あるいは，nがFとGをもつならば，あるものがFとGをもつ）を可能ならしめる．さらに規則は，任意に選ばれた対象a，b，cに関する前提に対しても適用されうるように拡張される．なぜならば，任意に選ばれたものがFをもつならば，その場合にもまた，あるものがFをもつからである．故に，たとえば，EI は前提 $Fa \vee Ga$ から，結論 $(\exists x)(Fx \vee Gx)$ へと進むこと（任意に選ばれた

対象がFまたはGをもつならば，あるものがFまたはGをもつ）を可能ならしめるであろう．

この規則の適用された非常に簡単な例がつぎの（明らかに妥当な）連式の証明に見られる．

104　$(x)Fx \vdash (\exists x)Fx$

1	(1)	$(x)Fx$	A
1	(2)	Fa	1 UE
1	(3)	$(\exists x)Fx$	2 EI

すべてのものがFをもつならば，特定の場合に，任意に選ばれた対象aはFをもち，そしてこのことから EI によって，あるものがFをもつ．

存在量記号の除去の規則（Rule of existential quantifier elimination）〔EE〕は規則 vE に照らして見ると最もよく理解されうる．選言A v Bが与えられ，結論Cを確立することが求められているとすると，われわれはまずAを仮定してCを導き，つぎにBを仮定してCを導き，そして，CがAからもBからも導かれるならば，AあるいはBのいずれか一方が成り立つのであるから，Cが成り立つのでなければならない，ということが知られるのである．同様に，われわれの3つの対象から成る世界において，あるものがFをもつことが知られるならば，つぎのことを実際に知ることができる．

(1)　$Fm \lor Fn \lor Fo$.

Cという結論を求める場合に，複合された選言の各選言項を順に仮定し，そして，Cがすべてのそれらの選言項から帰結するならば，それらの選言項のどれかが成り立つのであるから，Cが成り立つのでなければならない，ということが知られるであろう．しかしながら，無限の世界が問題になる場合には，$(\exists x)Fx$ は一種の「無限の選言」であって，Cを無限に多くの選言項のそれぞれから導出することなど問題外である．さて UI の場合に，われわれが任意の名前‘a’，‘b’，‘c’の方法を採用したのは，「無限の連言」$(x)Fx$ を作るにいたる無限に多くの連言項を，個別的に証明することなどできない

であろうからであった．EE に対しても同じ方法を用いてもよいであろう．仮定，*Fm*，*Fn*，*Fo* からCが個別的に帰結することを示すかわりに，Cは，任意に選ばれた対象が*F*をもつという，ただ1つの仮定 *Fa* から帰結する，ということを示せばよい．そこで証明のパターンはつぎの通りであろう．$(\exists x)Fx$ が与えられ，またCが仮定 *Fa* から帰結するとするならば，Cはいずれにしても帰結する．この場合，*Fa* からのCの証明は，擬装した選言である $(\exists x)Fx$ に含まれているすべての選言項からの，可能な無限に多くのCの導出の圧縮された表現にほかならない．われわれはここで *Fa* のことを，望むらくは示唆的に，存在命題 $(\exists x)Fx$ に対応する代表的選言項（typical disjunct）とよんでもよいであろう．

従って EE に対する根拠づけは，つぎのようなものになる．あるものがある性質をもつとし，また任意に選ばれた対象がその性質をもつという仮定から，結論Cが帰結することが示されうるならば，Cが成り立つことが知られる．なぜならば，あるものがその性質をもち，またどのものがその性質をもつとしてもCが成り立つならば，Cはいずれにしても成り立つからである．結論Cはもちろん，vE の場合と同様，存在命題が依存するすべての仮定に依存し，また対応する代表的選言項からCを導出するために用いられた仮定のなかから，その選言項自身を除いたものに依存する．そして右側には，3つの行を挙げることにする．すなわち，(i)存在命題が現われる行，(ii)代表的選言項が仮定される行，(iii)Cが仮定としての代表的選言項から結論として導出される行．

これらの新しい規則はつぎの証明によって例示される．

105　$(x)(Fx\rightarrow Gx), (\exists x)Fx \vdash (\exists x)Gx$

1	(1)	$(x)(Fx\rightarrow Gx)$	A
2	(2)	$(\exists x)Fx$	A
3	(3)	Fa	A
1	(4)	$Fa\rightarrow Ga$	1 UE

1, 3	(5)	Ga	3, 4 MPP
1, 3	(6)	$(\exists x)Gx$	5 EI
1, 2	(7)	$(\exists x)Gx$	2, 3, 6 EE

すべてのFをもつものはGをもち，またあるものがFをもつならば，あるものがGをもつことが示される．EE を適用することへの準備として，(3)の行において，任意に選ばれた対象aがFをもつことを仮定し，そこから（(6)の行において）あるものがGをもつことを結論する．いまや EE を適用するための準備は整った．あるものがFをもつという，存在命題が(2)の行において与えられ，そしてそれに対応する代表的選言項からの求める結論の導出が(6)の行において与えられるならば，われわれは(7)の行においてまたその結論をうる．右側に，存在命題である(2)の行，代表的選言項である(3)の行，およびそれを仮定してえられた結論である(6)の行が挙げられる．いまや結論は，存在命題が依存しているすべての仮定——ここではただ存在命題そのものだけ——および代表的選言項 Fa から結論を導くために用いられた，Fa そのもの以外のすべての仮定に依存する．それらは(1)と(2)にほかならない．

vE とのアナロジーは，特殊な場合として，mとnのみを含む，2つの対象から成る世界を取り扱っていると仮定することによって，明らかにされる．その場合には，この世界に対して，$(\exists x)Fx$ は $Fm \vee Fn$ に等しく，また$(\exists x)Gx$ は $Gm \vee Gn$ に等しい．EE のかわりに vE を用いた，上の証明に対応する証明はつぎのようにして行なわれるであろう．

1	(1)	$(x)(Fx \rightarrow Gx)$	A
2	(2)	$Fm \vee Fn$	A

3	(3)	Fm	A	3′	(3′)	Fn	A
1	(4)	$Fm \rightarrow Gm$	1 UE	1	(4′)	$Fn \rightarrow Gn$	1 UE
1, 3	(5)	Gm	3, 4 MPP	1, 3′	(5′)	Gn	3′, 4′ MPP
1, 3	(6)	$Gm \vee Gn$	5 vI	1, 3′	(6′)	$Gm \vee Gn$	5′ vI

1, 2	(7)	$Gm \vee Gn$	2, 3, 6, 3′, 6′ vE

ここで(3′)－(5′)は，‘m’のかわりに‘n’を用いて，(3)―(5)を正確に再現している．105のわれわれが実際に行なった証明の(3)―(6)の行は，固有名‘m’および‘n’のかわりに任意の名前を用い，個別的選言項‘Fm’および‘Fn’のかわりに代表的選言項‘Fa’を用いることによって，これらの2つの論証を1つの論証に圧縮したものである．

106　$(x)(Gx \to Hx), (\exists x)(Fx \mathbin{\&} Gx) \vdash (\exists x)(Fx \mathbin{\&} Hx)$

1	(1)	$(x)(Gx \to Hx)$	A
2	(2)	$(\exists x)(Fx \mathbin{\&} Gx)$	A
3	(3)	$Fa \mathbin{\&} Ga$	A
1	(4)	$Ga \to Ha$	1 UE
3	(5)	Ga	3 &E
1, 3	(6)	Ha	4, 5 MPP
3	(7)	Fa	3 &E
1, 3	(8)	$Fa \mathbin{\&} Ha$	6, 7 &I
1, 3	(9)	$(\exists x)(Fx \mathbin{\&} Hx)$	8 EI
1, 2	(10)	$(\exists x)(Fx \mathbin{\&} Hx)$	2, 3, 9 EE

この証明における戦略は明らかなのでなければならない．$(\exists x)(Fx \mathbin{\&} Gx)$から$(\exists x)(Fx \mathbin{\&} Hx)$を証明するために，対応する代表的選言項，$Fa \mathbin{\&} Ga$から，同じ結論を導くことをめざす．$G$をもつすべてのものは$H$をもつ故，$Ga$から$Ha$を推論することができ，従って，$a$は$F$と$H$をもち，またそれ故に，あるものが$F$と$H$をもつことになる．(10)における結論は，もとの存在命題である(2)に依存するとともに，(9)の行に見られるように，(3)から結論をうるために用いられた(1)に依存する．

これら2つの証明は，証明を発見する上に一般的なヒントとなることを，具体的な例によって示している．$(\exists x)(\cdots\cdots x\cdots\cdots)$が与えられ，そして結論Cを証明しようとするときには，$(\cdots\cdots a\cdots\cdots)$を代表的選言項として仮定し，それからCを導くことを試みるべきである．なぜならば，それに成功

するならば，EE はほかならぬこの結論を与えることになるであろうからである．（………a………）が仮定されたならば，命題計算のタイプの推論が，一般にCの導出において助けとなるであろう．

UIの場合におけると同様，EEによって任意の名前を用いるためには，誤謬を避けようとすれば，ある制限が必要である．UI の場合には，問題になる任意の名前が，結論がそれに基づいて導かれることになる仮定のなかに現われてはならないということが要求された．EE に対しては，問題になる任意の名前が，導かれる結論Cのなかにも，また代表的選言項からCを導くために用いられた仮定のなかにも，現われてはならないということを（もちろんそれは，代表的選言項そのもののなかには現われるであろうが）われわれは要求する．

任意の名前が，結論Cのなかには現われてはならないという理由を知るためには，そうでなければ，あるものがFをもつという仮定から，すべてのものがFをもつということが証明されうるであろうということを考えれば十分である．

1	(1)	$(\exists x)Fx$	A
2	(2)	Fa	A
1	(3)	Fa	1, 2, 2 EE
1	(4)	$(x)Fx$	3 UI

UI の適用は正しい．なぜならば，1は‘a’を含まないからである．しかしEE の適用は正しくない．なぜならば，問題になる結論，ここでは Fa，は‘a’を含んでいるからである．あるものがFをもっていることから，任意に選ばれた対象がFをもつということは帰結しない．もちろん Fa はそれ自身からは帰結するけれども．任意の名前が，Cをうるために用いられた（代表的選言項以外の）仮定のなかには現われてはならないということを理解するために，つぎの「証明」を考えてみよう．

1	(1)	Fa	A

2	(2)	$(\exists x)Gx$	A
3	(3)	Ga	A
1, 3	(4)	$Fa\ \&\ Ga$	1, 3 &I
1, 3	(5)	$(\exists x)(Fx\ \&\ Gx)$	4 EI
1, 2	(6)	$(\exists x)(Fx\ \&\ Gx)$	2, 3, 5 EE

あるものがFとGをもつという結論が．ここでは2つの仮定，任意に選ばれた対象はFをもつと，あるものがGをもつ，からえられている．さて，Fを偶数であること，Gを奇数であることとしよう．すると，偶数である数aを選ぶことはできるから，Faは真となる．また奇数が存在するから，$(\exists x)Gx$もまた真である．しかるに，任意の数が偶数であって奇数であるというのは偽である．(5)の行における結論は，'a'を含む(1)に依存しているので，EEの適用は不健全なのである．

新しい制限はこれまた，実際にあたって守ることは容易である．たとえば，106の(10)の行において，EEが正しく適用されていることを知るためには，(9)の行をしらべてみる．そこにおいてえられている結論は'a'を含んでいない．もちろん，(9)が依存している2つの仮定のうち，代表的選言項である(3)は'a'を含んでいるが，(1)は含んでいない．こうして制限は守られているのである．

任意に選ばれた対象は，われわれの仕事のなかでは大きな役割を演ずるのであるから，その地位をはっきりさせることを試みておくのがよいであろう．Fをある性質，aをある世界から任意に選ばれた対象としよう．すると，すべてのものがFをもつならばaはFをもつ．しかし逆は成り立たない．われわれは連式 $(x)Fx \vdash Fa$ を妥当として受けいれるが，連式 $Fa \vdash (x)Fx$ を妥当とは考えない．これを受けいれないのは，aは任意に選ばれてはいるとしても，代表的 (typical) ではないであろうからである．他方 UI によって，ある条件のもとにわれわれは $(\cdots\cdots a \cdots\cdots)$ から結論 $(x)(\cdots\cdots x \cdots\cdots)$ へ進む．しかしながら，これにともなう条件は，aがここでは代表的であることを保証

するような意味のものである．というのは，われわれは（……… a ………）が，a についてのいかなる特別の仮定にも依存しないものであるべきことを規約するのだからである．われわれはまた，a が F をもつならばあるものが F をもつが，その逆は成り立たない，と主張する．連式 $Fa \vdash (\exists x)Fx$ は妥当として受けいれるが，連式 $(\exists x)Fx \vdash Fa$ を妥当とは考えず，a は任意に選ばれてはいるが，与えられた F をもつ対象の１つではないかも知れないから，この連式を受けいれないのである．他方，EE によって，ある条件のもとに，Fa からえられる結論を，直ちに $(\exists x)Fx$ から，あたかも Fa の含意するものを $(\exists x)Fx$ もまた含意するかのように，導出することができる．しかしながらこれにともなう条件は，そのような結論はすべて，a が代表的であり――Fa 以外には a について何の特別の仮定もされず，また結論は a に関わらない――従って，F をもつ与えられた対象の１つと考えることができる，という了解のもとにのみ，Fa から導かれる，ということを保証するような意味のものである．こういうわけで，任意に選ばれた対象が F をもつという主張は，$(x)Fx$ という主張からも $(\exists x)Fx$ という主張からも区別されねばならない．それは前者から導出され，また後者はそれから導出されるものなのではあるけれども．

練 習 問 題

1　量記号の規則と命題計算の規則を用いて，つぎの連式の妥当性を示せ．

（a）　$(x)(Fx \rightarrow Gx), (\exists x) - Gx \vdash (\exists x) - Fx$

（b）　$(x)(Fx \rightarrow Gx \ \& \ Hx), (\exists x)Fx \vdash (\exists x)Hx$

（c）　$(x)(Fx \vee Gx \rightarrow Hx), (\exists x) - Hx \vdash (\exists x) - Fx$

2　(i)　量記号の規則と命題計算の規則を用いて，つぎの連式の妥当性を示せ．

（a）　$(x)(Gx \rightarrow -Hx), (\exists x)(Fx \ \& \ Gx) \vdash (\exists x)(Fx \ \& \ -Hx)$

（b）　$(x)(Hx \rightarrow Gx), (\exists x)(Fx \ \& \ -Gx) \vdash (\exists x)(Fx \ \& \ -Hx)$

(*c*)　$(x)(Hx \to -Gx), (\exists x)(Fx \ \& \ Gx) \vdash (\exists x)(Fx \ \& -Hx)$

(*d*)　$(x)(Gx \to Hx), (\exists x)(Gx \ \& \ Fx) \vdash (\exists x)(Fx \ \& \ Hx)$

(*e*)　$(\exists x)(Gx \ \& \ Hx), (x)(Gx \to Fx) \vdash (\exists x)(Fx \ \& \ Hx)$

(*f*)　$(x)(Gx \to -Hx), (\exists x)(Gx \ \& \ Fx) \vdash (\exists x)(Fx \ \& -Hx)$

(*g*)　$(\exists x)(Gx \ \& -Hx), (x)(Gx \to Fx) \vdash (\exists x)(Fx \ \& -Hx)$

(ii)　つぎの論証のそれぞれに対して，上の連式(*a*)−(*g*)のいずれがその論理形式を示し(そうして論証の妥当性を確立し)ているかを述べよ.

(*a*)　いかなる山岳も登攀できない．幾つかの小山は登攀できる．故に幾つかの小山は山岳ではない.

(*b*)　幾つかの山岳は登攀できる．すべての山岳は小山である．故に幾つかの小山は登攀できる.

(*c*)　すべての小山は登攀できる．幾つかの山岳は登攀できない．故に幾つかの山岳は小山ではない.

(*d*)　すべての小山は登攀できる．幾つかの小山は山岳である．故に幾つかの山岳は登攀できる.

(*e*)　いかなる山岳も登攀できない．幾つかの小山は山岳である．故に幾つかの小山は登攀できない.

(*f*)　幾つかの山岳は登攀できない．すべての山岳は小山である．故に幾つかの小山は登攀できない.

(*g*)　いかなる山岳も登攀できない．幾つかの山岳は小山である．故に幾つかの小山は登攀できない.

第4節　量記号を含む初等的な妥当的連式

連式 100−106 において，われわれがいまや確立することのできる，量記号に関する幾つかの基本的結果を見た. さらにその他の，そのような結果を証明することにこの節はあてられる．これらの結果はそれ自身としても重要であるが，その証明はまた，量記号の規則の用法についてのより大きい洞察をも，

ついでながら与えてくれるであろう.

107 $(x)(Fx \rightarrow Gx) \vdash (x)Fx \rightarrow (x)Gx$

108 $(x)(Fx \rightarrow Gx) \vdash (\exists x)Fx \rightarrow (\exists x)Gx$

すべてのFをもつものがGをもつならば，このことから，すべてのものがFをもつならばすべてのものはGをもつということが帰結する (107). また，あるものがFをもつならばあるものはGをもつということが帰結する (108). 証明は103と105の証明から，それぞれの場合に，CPをさらにもう一度適用することによって，直ちにえられる.

109 $(x)(Fx \ \& \ Gx) \dashv\vdash (x)Fx \ \& \ (x)Gx$

(*a*) $(x)(Fx \ \& \ Gx) \vdash (x)Fx \ \& \ (x)Gx$

1	(1)	$(x)(Fx \ \& \ Gx)$	A
1	(2)	$Fa \ \& \ Ga$	1 UE
1	(3)	Fa	2 &E
1	(4)	$(x)Fx$	3 UI
1	(5)	Ga	2 &E
1	(6)	$(x)Gx$	5 UI
1	(7)	$(x)Fx \ \& \ (x)Gx$	4, 6 &I

(*b*) $(x)Fx \ \& \ (x)Gx \vdash (x)(Fx \ \& \ Gx)$

1	(1)	$(x)Fx \ \& \ (x)Gx$	A
1	(2)	$(x)Fx$	1 &E
1	(3)	Fa	2 UE
1	(4)	$(x)Gx$	1 &E
1	(5)	Ga	4 UE
1	(6)	$Fa \ \& \ Ga$	3, 5 &I
1	(7)	$(x)(Fx \ \& \ Gx)$	6 UI

すべてのものがFとGをもつという命題は，すべてのものがFをもちそしてすべてのものがGをもつという命題と，相互に導出可能である. '*a*' は，

いずれの証明の仮定(1)にも現われない故，UI への制限は，（ a ）の(4)と(6)，（ b ）の(7)の行においてみたされていることに注意する．それ以外に証明はほとんど注釈を要しない．

110　$(\exists x)(Fx \vee Gx) \dashv\vdash (\exists x)Fx \vee (\exists x)Gx$

（ a ）　$(\exists x)(Fx \vee Gx) \vdash (\exists x)Fx \vee (\exists x)Gx$

1	(1)	$(\exists x)(Fx \vee Gx)$	A
2	(2)	$Fa \vee Ga$	A
3	(3)	Fa	A
3	(4)	$(\exists x)Fx$	3 EI
3	(5)	$(\exists x)Fx \vee (\exists x)Gx$	4 vI
6	(6)	Ga	A
6	(7)	$(\exists x)Gx$	6 EI
6	(8)	$(\exists x)Fx \vee (\exists x)Gx$	7 vI
2	(9)	$(\exists x)Fx \vee (\exists x)Gx$	2, 3, 5, 6, 8 vE
1	(10)	$(\exists x)Fx \vee (\exists x)Gx$	1, 2, 9 EE

（ b ）　$(\exists x)Fx \vee (\exists x)Gx \vdash (\exists x)(Fx \vee Gx)$

1	(1)	$(\exists x)Fx \vee (\exists x)Gx$	A
2	(2)	$(\exists x)Fx$	A
3	(3)	Fa	A
3	(4)	$Fa \vee Ga$	3 vI
3	(5)	$(\exists x)(Fx \vee Gx)$	4 EI
2	(6)	$(\exists x)(Fx \vee Gx)$	2, 3, 5 EE
7	(7)	$(\exists x)Gx$	A
8	(8)	Ga	A
8	(9)	$Fa \vee Ga$	8 vI
8	(10)	$(\exists x)(Fx \vee Gx)$	9 EI
7	(11)	$(\exists x)(Fx \vee Gx)$	7, 8, 10 EE

1　(12)　$(\exists x)(Fx \vee Gx)$　　1, 2, 6, 7, 11 vE

あるものがFあるいはGをもつという命題は，あるものがFをもつかあるいはあるものがGをもつかであるという命題と，相互に導出可能である．証明(a)においては，全体の戦略は，(1)の行で存在命題が仮定として与えられると，それに対応する代表的選言項（(2)の行）を仮定して，それから求める結論を導くこと，である，これは(9)の行において，vE によってはたされる．代表的選言項がそれ自身選言なので，vE はこみいっている．その結果，結論をそれぞれの項から順に導くことになる（(5)と(8)の行）．最後に EE を適用するところで，結論が‘a’を含まず，(9)の行は(2)，すなわち代表的選言項そのものにのみ依存することに注意する．従って(10)は(1)のみに依存し，EE に対する制限は満たされている．証明(b)においては，全体の戦略は，(1)の行において仮定として選言を与えておいて，vE によって進むことである．各選言項は存在命題であるから，それを仮定したのち((2)と(7))，それに対応する代表的選言項を仮定し（(3)と(8))，そしてそれから結論を導く（(5)と(10))．EE の2回の適用を規則に従って行なうために（(6)と(11))，結論が‘a’を含まず，また(5)と(10)の行が代表的選言項(3)と(8)にのみ依存することに注意する．

109 と 110 の，相互導出可能性の結果は，前2節において論じられたように，普遍量記号が連言のなかまであり，存在量記号が選言のなかまであることを記憶しているならば，全く予期されうることである．大まかに言うと，109 と 110 は，普遍量記号は連言によって分配され，存在量記号は選言によって分配されることを主張するものである．

111　$(\exists x)(Fx \,\&\, Gx) \vdash (\exists x)Fx \,\&\, (\exists x)Gx$

1　(1)　$(\exists x)(Fx \,\&\, Gx)$　　A

2　(2)　$Fa \,\&\, Ga$　　A

2　(3)　Fa　　2 &E

2　(4)　$(\exists x)Fx$　　3 EI

2　(5)　Ga　　2 &E

2	(6)	$(\exists x)Gx$	5 EI
2	(7)	$(\exists x)Fx \mathbin{\&} (\exists x)Gx$	4, 6 &I
1	(8)	$(\exists x)Fx \mathbin{\&} (\exists x)Gx$	1, 2, 7 EE

あるものがFとGをもつならば，そのことから，あるものがFをもちそしてあるものがGをもつということが帰結する．われわれは EE によって進み，(2)の行において，(1) $(\exists x)(Fx \mathbin{\&} Gx)$ に対応する代表的選言項 $Fa \mathbin{\&} Ga$ を仮定する．(8)の行における EE に対して，結論には‘a’が含まれていないこと，また(7)は(2)にのみ依存することを注意する．

逆の連式 $(\exists x)Fx \mathbin{\&} (\exists x)Gx \vdash (\exists x)(Fx \mathbin{\&} Gx)$ は妥当ではない．正の整数の世界を考え，F を偶数であるという性質，G を奇数であるという性質としよう．すると，偶数が存在しそして奇数が存在する（$(\exists x)Fx \mathbin{\&} (\exists x)Gx$）ということは真であるが，偶数でありそして奇数である数が存在する（$(\exists x)(Fx \mathbin{\&} Gx)$）ということは偽である．この連式を証明しようとする自然な試みが，EE に対する制限に照らして，どのようにして失敗に帰するかを見ておくことは有益である．われわれはつぎのように証明をはじめるであろう．

1	(1)	$(\exists x)Fx \mathbin{\&} (\exists x)Gx$	A
1	(2)	$(\exists x)Fx$	1 &E
1	(3)	$(\exists x)Gx$	1 &E
4	(4)	Fa	A
5	(5)	Ga	A
4, 5	(6)	$Fa \mathbin{\&} Ga$	4, 5 &I
4, 5	(7)	$(\exists x)(Fx \mathbin{\&} Gx)$	6 EI

存在命題(2)および(3)に対して，われわれは代表的選言項(4)および(5)を仮定して，それらから結論 $(\exists x)(Fx \mathbin{\&} Gx)$ を導出した．しかし EE を適用するどのようなくわだても，(2)を用いるにせよ(3)を用いるにせよ，こんどはうまく行かない．(7)の行の結論は(4)と(5)に依存し，そのいずれにも‘a’が現われているからである．それ故，

1, 5　(8)　$(\exists x)(Fx \mathbin{\&} Gx)$　　2, 4, 7 EE

もえられないし（'a' が(5)に現われるから），

1, 4　(8)　$(\exists x)(Fx \mathbin{\&} Gx)$　　3, 5, 7 EE

もえられない（'a' が(4)に現われるから）．もちろん，これらの行のいずれかに到達することができるとするならば，もう1回 EE の（健全な）適用を行なうことによって，結論

1　(9)　$(\exists x)(Fx \mathbin{\&} Gx)$

が帰結するであろうことは言うまでもない．

112　$(x)Fx \vee (x)Gx \vdash (x)(Fx \vee Gx)$

1	(1)	$(x)Fx \vee (x)Gx$	A
2	(2)	$(x)Fx$	A
2	(3)	Fa	2 UE
2	(4)	$Fa \vee Ga$	3 vI
2	(5)	$(x)(Fx \vee Gx)$	4 UI
6	(6)	$(x)Gx$	A
6	(7)	Ga	6 UE
6	(8)	$Fa \vee Ga$	7 vI
6	(9)	$(x)(Fx \vee Gx)$	8 UI
1	(10)	$(x)(Fx \vee Gx)$	1, 2, 5, 6, 9 vE

すべてのものがFをもつか，あるいはすべてのものがGをもつならば，すべてのものはFあるいはGをもつ．証明は vE による．(5)と(9)の行において UI を用いる際に，仮定された選言(1)のいずれの選言項にも 'a' が含まれず，従って制限が満たされていることに注意する．

逆の連式，$(x)(Fx \vee Gx) \vdash (x)Fx \vee (x)Gx$ は妥当ではない．そして上にも用いられた解釈によって，その妥当でない理由が示される．なぜならば，すべての正の整数は偶数であるか奇数であるかであるが，すべての数が偶数ではなく，またすべての数が奇数でもない．この場合には，この連式を証明し

ようとする自然な試みをさしとめるのは UI に対する制限である．かくして，

1	(1)	$(x)(Fx \vee Gx)$	A
1	(2)	$Fa \vee Ga$	1 UE
3	(3)	Fa	A

$Fa \vee Ga$ を(1)から結論し，そして第1の選言項 Fa を(3)の行に仮定する．しかし(3)は‘a’を含む故，ここで $(x)Fx$ を結論することをさしとめられる．この段階が許されるとするならば，$(x)Fx \vee (x)Gx$ を vI によって結論し，つぎに Ga からも同じことを結論することができるであろう．そして vE によって不妥当な連式が作り出されるであろう．

113　$(\exists x)Fx \dashv\vdash -(x)-Fx$

（a）$(\exists x)Fx \vdash -(x)-Fx$

1	(1)	$(\exists x)Fx$	A
2	(2)	Fa	A
3	(3)	$(x)-Fx$	A
3	(4)	$-Fa$	3 UE
2, 3	(5)	$Fa \mathbin{\&} -Fa$	2, 4 &I
2	(6)	$-(x)-Fx$	3, 5 RAA
1	(7)	$-(x)-Fx$	1, 2, 6 EE

（b）$-(x)-Fx \vdash (\exists x)Fx$

1	(1)	$-(x)-Fx$	A
2	(2)	$-(\exists x)Fx$	A
3	(3)	Fa	A
3	(4)	$(\exists x)Fx$	3 EI
2, 3	(5)	$(\exists x)Fx \mathbin{\&} -(\exists x)Fx$	2, 4 &I
2	(6)	$-Fa$	3, 5 RAA
2	(7)	$(x)-Fx$	6 UI
1, 2	(8)	$(x)-Fx \mathbin{\&} -(x)-Fx$	1, 8 &I

1	(9)	$--(\exists x)Fx$	2, 8 RAA
1	(10)	$(\exists x)Fx$	9 DN

あるものがFをもつという命題と，すべてのものがFを欠いているということはないという 命題とは，相互に導出可能である．証明(a)においては，$(\exists x)Fx$が与えられると，われわれは代表的選言項Faを仮定し((2)の行)，そして結論$-(x)-Fx$をそれから導くことをめざす．これはRAAによってえられるので，従って(3)の行に$(x)-Fx$を仮定する．結論は‘a’を含まないから，(7)の行においては，EEの制限が満たされている．証明(b)においては，(2)の行で$-(\exists x)Fx$を仮定し，(1)と矛盾する$(x)-Fx$を導出することをめざす．$(x)-Fx$をうるためには，$-Fa$を導いてUIを用いれば十分であるから，そこでFaを仮定し((3)の行)，矛盾を導く((5)の行)．(7)の行においてUIを適用する際に，(6)は(2)にのみ依存するが，これには‘a’が含まれていないことに注意せよ．

量記号と‘&’および‘v’との間の関係によって，113の相互導出可能性の結果は，第1章第5節の36と同じ種類のものとなる．実際，必要な変更を加えると，両者の証明は構造的に同じものであること，読者みずからチェックして御覧になれる通りである．大まかに言うと，113は，任意の存在命題は普遍的命題の否定に等しいということを教えるのであるが，それは36が，任意の選言はある連言の否定に等しいと教えるのと同じ仕方においてである．われわれのつぎの結果は，逆に，任意の普遍的命題は存在命題の否定に等しいということを言うものであって，連式1．5．1(h)と比較されるべきものである．

114　$(x)Fx \dashv\vdash -(\exists x)-Fx$

(a)　$(x)Fx \vdash -(\exists x)-Fx$

1	(1)	$(x)Fx$	A
2	(2)	$(\exists x)-Fx$	A
3	(3)	$-Fa$	A

1	(4)	Fa	1 UE
1, 3	(5)	$Fa \,\&\, -Fa$	3, 4 &I
3	(6)	$-(x)Fx$	1, 5 RAA
2	(7)	$-(x)Fx$	2, 3, 6 EE
1, 2	(8)	$(x)Fx \,\&\, -(x)Fx$	1, 7 &I
1	(9)	$-(\exists x)-Fx$	2, 8 RAA

(*b*)　$-(\exists x)-Fx \vdash (x)Fx$

1	(1)	$-(\exists x)-Fx$	A
2	(2)	$-Fa$	A
2	(3)	$(\exists x)-Fx$	2 EI
1, 2	(4)	$(\exists x)-Fx \,\&\, -(\exists x)-Fx$	1, 3 &I
1	(5)	$--Fa$	2, 4 RAA
1	(6)	Fa	5 DN
1	(7)	$(x)Fx$	6 UI

すべてのものがFをもつという命題と，あるものがFを欠いているということはないという命題とは，相互に導出可能である．証明(*a*)においては，(1)に矛盾する $-(x)Fx$ をうるために，$(\exists x)-Fx$ を仮定し（(2)の行），EE によって進み，(3)の行で代表的選言項を仮定する．証明(*b*)においては，(1)から Fa を証明すれば十分であるから，(2)の行において $-Fa$ を仮定し，矛盾を求める．この証明において，EE と UI の制限が満たされていることを，読者は確かめておくべきである．

115　$(x)Fx \dashv\vdash (y)Fy$

1	(1)	$(x)Fx$	A
1	(2)	Fa	1 UE
1	(3)	$(y)Fy$	2 UI

逆も同様に導出可能である．変数は前後参照のための方便に過ぎないから，この相互導出可能性があると考えられる．2つの文は実際上同じ命題――す

べてのものはFをもつ——を表現している．同様に，

116　$(\exists x)Fx \dashv\vdash (\exists y)Fy$

1	(1)	$(\exists x)Fx$	A
2	(2)	Fa	A
2	(3)	$(\exists y)Fy$	2 EI
1	(4)	$(\exists y)Fy$	1, 2, 3 EE

つぎの証明は注釈を必要としない．しかし読者は，EE と UI に対する制限が順守されていることに注意していただきたい．

117　$(x)(Fx \rightarrow Gx) \dashv\vdash -(\exists x)(Fx \;\&\; -Gx)$

(*a*)　$(x)(Fx \rightarrow Gx) \vdash -(\exists x)(Fx \;\&\; -Gx)$

1	(1)	$(x)(Fx \rightarrow Gx)$	A
2	(2)	$(\exists x)(Fx \;\&\; -Gx)$	A
3	(3)	$Fa \;\&\; -Ga$	A
3	(4)	$-(Fa \rightarrow Ga)$	3 SI(S) 2.2.5(*g*)
1	(5)	$Fa \rightarrow Ga$	1 UE
1, 3	(6)	$(Fa \rightarrow Ga) \;\&$ $-(Fa \rightarrow Ga)$	4, 5 &I
3	(7)	$-(x)(Fx \rightarrow Gx)$	1, 6 RAA
2	(8)	$-(x)(Fx \rightarrow Gx)$	2, 3, 7 EE
1, 2	(9)	$(x)(Fx \rightarrow Gx) \;\&$ $-(x)(Fx \rightarrow Gx)$	1, 8 &I
1	(10)	$-(\exists x)(Fx \;\&\; -Gx)$	2, 9 RAA

(*b*)　$-(\exists x)(Fx \;\&\; -Gx) \vdash (x)(Fx \rightarrow Gx)$

1	(1)	$-(\exists x)(Fx \;\&\; -Gx)$	A
2	(2)	$-(Fa \rightarrow Ga)$	A
2	(3)	$Fa \;\&\; -Ga$	2 SI(S) 2.2.5(*g*)
2	(4)	$(\exists x)(Fx \;\&\; -Gx)$	3 EI

1, 2	(5)	$(\exists x)(Fx \,\&\, -Gx) \,\&$ $-(\exists x)(Fx \,\&\, -Gx)$	1, 4 &I
1	(6)	$--(Fa \rightarrow Ga)$	2, 5 RAA
1	(7)	$Fa \rightarrow Ga$	6 DN
1	(8)	$(x)(Fx \rightarrow Gx)$	7 UI

すべてのFをもつものはGをもつという命題と，あるものはFをもつがGをもたないということはないという命題とは，相互に導出可能である．より大まかな言い方をすると，すべてのFをもつものはGをもつと主張することは，FをもつあるものがGを欠くことを否定することである．

この節の最後の2つの相互導出可能性は，すこし意外な感じのする結果である．

118　$(x)(Fx \rightarrow P) \dashv\vdash (\exists x)Fx \rightarrow P$

（a）　$(x)(Fx \rightarrow P) \vdash (\exists x)Fx \rightarrow P$

1	(1)	$(x)(Fx \rightarrow P)$	A
2	(2)	$(\exists x)Fx$	A
3	(3)	Fa	A
1	(4)	$Fa \rightarrow P$	1 UE
1, 3	(5)	P	3, 4 MPP
1, 2	(6)	P	2, 3, 5 EE
1	(7)	$(\exists x)Fx \rightarrow P$	2, 6 CP

（b）　$(\exists x)Fx \rightarrow P \vdash (x)(Fx \rightarrow P)$

1	(1)	$(\exists x)Fx \rightarrow P$	A
2	(2)	Fa	A
2	(3)	$(\exists x)Fx$	2 EI
1, 2	(4)	P	1, 3 MPP
1	(5)	$Fa \rightarrow P$	2, 4 CP
1	(6)	$(x)(Fx \rightarrow P)$	5 UI

任意の対象に対して，それがFをもつならばP，という普遍的命題と，あるものがFをもつならばP，という条件法とは，相互に導出可能である．（ここで，'$(x)(Fx \to P)$' における普遍量記号は '$(Fx \to P)$' の全表現に作用を及ぼすのに対して，'$(\exists x)Fx \to P$' における存在量記号は，全体の条件法の前件にのみ作用を及ぼすことに注目することが大切である．'$-(P \to Q)$' と '$-P \to Q$' の違いと比較せよ．）たとえば，Fを人間であるという性質とし，Pを地球には人間が住んでいるという命題とすれば，人間が存在するならば地球には人間が住んでいる，と言うことと，任意の対象に対して，それが人間であるならば地球には人間が住んでいる，と言うこととは同じである．

119　$(\exists x)(P \to Fx) \dashv\vdash P \to (\exists x)Fx$

(*a*) $(\exists x)(P \to Fx) \vdash P \to (\exists x)Fx$

1	(1)	$(\exists x)(P \to Fx)$	A
2	(2)	P	A
3	(3)	$P \to Fa$	A
2, 3	(4)	Fa	2, 3 MPP
2, 3	(5)	$(\exists x)Fx$	4 EI
1, 2	(6)	$(\exists x)Fx$	1, 3, 5 EE
1	(7)	$P \to (\exists x)Fx$	2, 6 CP

(*b*) $P \to (\exists x)Fx \vdash (\exists x)(P \to Fx)$

1	(1)	$P \to (\exists x)Fx$	A
	(2)	$P \vee -P$	TI 44
3	(3)	P	A
1, 3	(4)	$(\exists x)Fx$	1, 3 MPP
5	(5)	Fa	A
5	(6)	$P \to Fa$	5 SI(S) 50
5	(7)	$(\exists x)(P \to Fx)$	6 EI
1, 3	(8)	$(\exists x)(P \to Fx)$	4, 5, 7 EE

9	(9)	$-P$	A
9	(10)	$P\to Fa$	9 SI(S) 51
9	(11)	$(\exists x)(P\to Fx)$	10 EI
1	(12)	$(\exists x)(P\to Fx)$	2, 3, 8, 9, 11 vE

Pならば，Fをもつようなあるものが存在するという存在命題と，PならばあるものがFをもつという条件法とは，相互に導出可能である．証明(a)は，(3)が(1)に対応する代表的選言項であることに注意すれば，直ちにえられる．(2)の行におけるPは'a'を含まないから，(6)の行における EE の適用は制限に従っている．証明(b)はより複雑である．排中律を導入して((2)の行)，vE によって進む((12)の行)のが便利であることが明らかになる．(3)の行でPを仮定し，(8)の行でそれからの結論をうる．この局面において EE が用いられる．というのは，(4)の行における存在命題に対応する代表的選言項 Fa ((5)の行)からの結論が，(7)の行においてえられるからである．第 2 の局面 ((9)-(11)) は，(6)の行における第 1 の局面と同じように，$-P$から結論 $P\to Fa$ へ進む命題計算の連式——$-P\vdash P\to Q$ のたんなる代入例——を用いる．vE のあとでは，結論は(1)にしか依存しない．(1)は(8)の行において第 1 の選言項Pから結論を導くのに用いられたのである．

練 習 問 題

1　つぎの連式を確立せよ．

(a)　$(x)(Fx\to Gx)\vdash(x)-Gx\to(x)-Fx$

(b)　$(x)(Fx\to Gx)\vdash(\exists x)-Gx\to(\exists x)-Fx$

(c)　$(\exists x)-Fx\dashv\vdash-(x)Fx$

(d)　$(x)-Fx\dashv\vdash-(\exists x)Fx$

(e)　$(x)(Fx\to-Gx)\dashv\vdash-(\exists x)(Fx\,\&\,Gx)$

(f)　$(x)(Fx\longleftrightarrow Gx)\dashv\vdash(x)(Fx\to Gx)\,\&\,(x)(Gx\to Fx)$

(g)　$(x)(Fx\longleftrightarrow Gx)\vdash(x)Fx\longleftrightarrow(x)Gx$

(*h*)　$(x)(Fx\longleftrightarrow Gx)\vdash(\exists x)Fx\longleftrightarrow(\exists x)Gx$

2　(i)　本文のなかで証明されたどの連式が，すべての女は浮気であるという命題と，浮気でない女は存在しないという命題とが，相互に導出可能であることを示しているか．

(ii)　練習問題1において証明されたどの連式が，いかなる男も浮気ではないという命題と，浮気である男は存在しないという命題とが，相互に導出可能であることを示しているか．

3　つぎの相互導出可能性を示す結果を確立せよ．

(*a*)　$(x)(P\rightarrow Fx)\dashv\vdash P\rightarrow(x)Fx$

(*b*)　$(x)(P\ \&\ Fx)\dashv\vdash P\ \&\ (x)Fx$

(*c*)　$(\exists x)(P\ \&\ Fx)\dashv\vdash P\ \&\ (\exists x)Fx$

(*d*)　$(x)(P\vee Fx)\dashv\vdash P\vee(x)Fx$

(*e*)　$(\exists x)(P\vee Fx)\dashv\vdash P\vee(\exists x)Fx$

(*f*)　$(\exists x)(Fx\rightarrow P)\dashv\vdash(x)Fx\rightarrow P$

第5節　量記号を含む一般的な論証

これまでは，われわれの導出した連式は，関係よりはむしろ性質——1つ以上の変数よりはむしろ1つの変数があとにつづく述語文字——に関わるものであった．これからわれわれは，関係が現われる連式について考察し，複雑な論証が日常言語に現われるときに，それらの論証の妥当性を示すことについての一般的問題を考察する．

まず最初に，量記号の移動 (quantifier-shift) の原理の基礎となる2つの相互導出可能性を示す結果を挙げておくのが便利である．

120　$(x)(y)Fxy\dashv\vdash(y)(x)Fxy$

1	(1)	$(x)(y)Fxy$	A
1	(2)	$(y)Fay$	1 UE
1	(3)	Fab	2 UE

1　(4)　$(x)Fxb$　　3 UI

1　(5)　$(y)(x)Fxy$　4 UI

逆も同様に証明される．(2)の行において量記号‘(x)’およびそれと関連して用いられている‘x’を除去して，そのかわりに任意に選ばれた対象aを導入する．従って(2)は，任意の対象に対してaはFという関係をもつ，ということを言うのである．(2)から(3)への進みも同様であり，そして(3)は，任意に選ばれたaは任意に選ばれたbに対してFという関係をもつ，ということを主張するのである．UE は，1回に1つの普遍量記号を除去することを許すものであることに注意せよ．つぎに UI によって，逆に量記号を導入して行く．その際，‘a’も‘b’も(1)には現われないことに注意する．(2)からは，健全に，

1　(3′)　Faa

（aがすべてのものに対してFという関係をもつならば，aはa自身に対してFという関係をもつ）を結論しえたでもあろう．また(3′)からは，健全に，

1　(4′)　$(x)Fxx$

（任意に選ばれたaがa自身に対してFという関係をもつならば，通常の制限のもとに，すべてのものはそれ自身に対してFという関係をもつ）を結論しえたでもあろう．しかしもちろん，われわれが現に導いた(4)の行は，(3′)からは帰結しないし，またつぎの行も(3′)からは帰結しない．

(4″)　$(x)Fxa$.

aがa自身に対してFという関係をもつとしても，そのことから，すべてのものがaに対してFという関係をもつということは帰結しない．任意に選ばれた人は彼自身と同じ年齢をもつが，しかしすべての人がその年齢をもつということはない．すべての人は事実彼自身の年齢をもつ．これらの考察は，(3)の行において，異なった任意の名前‘b’を選ぶ理由とならねばならない．なぜなら，さもなければ，2つの異なった量記号をふたたび導入することができないであろうからである．

121　$(\exists x)(\exists y)Fxy \dashv\vdash (\exists y)(\exists x)Fxy$

1	(1)	$(\exists x)(\exists y)Fxy$	A
2	(2)	$(\exists y)Fay$	A
3	(3)	Fab	A
3	(4)	$(\exists x)Fxb$	3 EI
3	(5)	$(\exists y)(\exists x)Fxy$	4 EI
2	(6)	$(\exists y)(\exists x)Fxy$	2, 3, 5 EE
1	(7)	$(\exists y)(\exists x)Fxy$	1, 2, 6 EE

逆はこのたびも同様に証明される．(2)は(1)に対応する代表的選言項であり，そして(3)は今度は(2)に対応する代表的選言項である．われわれは‘a’と‘b’という異なった任意の名前を選ぶけれども，これには十分な理由がある．(6)の行における EE の適用は，(3)がかりに Faa であるならば，不健全であろう．任意に選ばれた a が a 自身に対して F という関係をもつ，という Faa からは，あるものがあるものに対して F という関係をもつということを，確かに結論することはできる（(5)の行）．しかしまた，Faa からは，

3　(4′)　$(\exists x)Fxx$

を結論することもできるであろう．しかるにこの結論は(2)からは帰結しないであろう．任意に選ばれた人 a がある人よりも背が高いとしよう．このことから，ある人がかれ自身より背が高いということは帰結しない．実際，Faa は(2)に対応する正しい代表的選言項ではない．

120 と 121 は，要するに，2つ以上の普遍量記号の順序と，2つ以上の存在量記号の順序は，実質的な意味の違いがないことを示すものである．しかしながら，これら2種類の量記号の混用については，このことは言えない．なるほどつぎのことは証明できる．

122　$(\exists x)(y)Fxy \vdash (y)(\exists x)Fxy$

1	(1)	$(\exists x)(y)Fxy$	A
2	(2)	$(y)Fay$	A
2	(3)	Fab	2 UE

2　(4)　$(\exists x)Fxb$　3 EI

2　(5)　$(y)(\exists x)Fxy$　4 UI

1　(6)　$(y)(\exists x)Fxy$　1, 2, 5 EE

ここで(2)は(1)に対応する代表的選言項である．(3)の行においてUEを適用するにあたって，異なった任意の名前'b'を選ぶことはきわめて重要である．なるほど Faa も(2)からの健全な結論ではあるだろう．そしてそれからまた

2　(4′)　$(\exists x)Fxa$

（aがa自身に対してFという関係をもつならば，あるものがaに対してFという関係をもつ）を推論することもできるであろう．しかし(5)の行における UI の適用はもはや不健全であろう．(2)は'a'を含むからである．

しかしながら，逆の連式 $(y)(\exists x)Fxy \vdash (\exists x)(y)Fxy$ は導出可能でない．またそれが導出可能であることは願わしいことでもないであろう．人間の世界を考え，Fを親であるという関係としよう．すると，すべての人はある人を親としてもつが，しかしすべての人の親である人が存在する，ということは偽である．これを証明しようとする自然な試みがどのようにして，われわれの規則に対する制限によって阻止されるかを見ることは有益である．たとえば，

1　(1)　$(y)(\exists x)Fxy$　A

1　(2)　$(\exists x)Fxa$　1 UE

3　(3)　Fba　A

3　(4)　$(y)Fby$　3 UI?

3　(5)　$(\exists x)(y)Fxy$　4 EI

1　(6)　$(\exists x)(y)Fxy$　2, 3, 5 EE

ただひとつの誤まった段階は(4)のそれである――(3)は'a'を含み，その結果 UI の制限が破られる点に誤まりがある．この「ニア・ミス」は，制限順守の実行を大切と考えるべきことをよく教えてくれるのでなければならない．

ド・モルガンが，明らかに健全であるにもかかわらず，伝統的論理学のわ

くぐみのなかでは取り扱うことができなかった論証として挙げた，有名な，また簡単な論証がある．

(1)　すべての馬は動物である．故にすべての馬の頭は動物の頭である．

(1)の妥当性をわれわれの規則によって示すためには，まず第1に述語計算の記号に翻訳しなければならない．Fを馬であること，Gを動物であること，Hを……の頭であるという関係，としよう．すると，論証の前提は明らかに，$(x)(Fx \rightarrow Gx)$ である．結論を記号化することへの第1歩として，つぎのような言い直しができるであろう．

(2)　馬の頭であるすべてのものは動物の頭である．

あるものが馬の頭であるためには，それがその馬の頭であるようなある馬が存在しなければならない．記号で書くと，aは，$(\exists y)(Fy \mathbin{\&} Hay)$ であるときまたそのときに限って，馬の頭である．同様に，aは，$(\exists y)(Gy \mathbin{\&} Hay)$ であるときまたそのときに限って，動物の頭である．故に，われわれが(1)の論証を正当化するために証明する必要のある連式はつぎの通りである．

123　$(x)(Fx \rightarrow Gx) \vdash (x)((\exists y)(Fy \mathbin{\&} Hxy) \rightarrow (\exists y)(Gy \mathbin{\&} Hxy))$

1	(1)	$(x)(Fx \rightarrow Gx)$	A
2	(2)	$(\exists y)(Fy \mathbin{\&} Hay)$	A
3	(3)	$Fb \mathbin{\&} Hab$	A
3	(4)	Fb	3 &E
3	(5)	Hab	3 &E
1	(6)	$Fb \rightarrow Gb$	1 UE
1, 3	(7)	Gb	4, 6 MPP
1, 3	(8)	$Gb \mathbin{\&} Hab$	5, 7 &I
1, 3	(9)	$(\exists y)(Gy \mathbin{\&} Hay)$	8 EI
1, 2	(10)	$(\exists y)(Gy \mathbin{\&} Hay)$	2, 3, 9 EE
1	(11)	$(\exists y)(Fy \mathbin{\&} Hay) \rightarrow (\exists y)(Gy \mathbin{\&} Hay)$	2, 10 CP

1　(12)　$(x)((\exists y)(Fy\ \&\ Hxy)\rightarrow(\exists y)(Gy\ \&\ Hxy))$　11 UI

(1)が仮定として与えられると，結論としての普遍的命題を証明するために，われわれはそれに対応する，任意に選ばれた対象 a に関する，(11)の行において見られるような主張を，導くことをめざす．これは条件法であるから，われわれはその前件を仮定し（(2)の行），その後件を導く（(10)の行）ことをめざす．仮定(2)は存在命題であるから，それに対応する代表的選言項を仮定し（(3)の行），それから同じ結論を導くことをめざす．代表的選言項において，新しい任意の名前‘b’を選んでいることに注意していただきたい．それからあとの戦略は，(9)の行までは，命題計算のレベルにとどまっている．そして(9)の行で EI が用いられる．EE の適用は，結論が（‘a’を実際含んではいるが）‘b’を含んでいないから，健全である（(10)の行）．UI の適用は，(1)が‘a’を含んでいないから健全である（(12)の行）．

つぎにもう少し複雑なつぎの論証を考えよう．

(3)　幾人かの少年はすべての少女を好きである．いかなる少年もいかなる読書狂をも好きでない．故にいかなる少女も読書狂ではない．

第1の前提は，少年であって，そしてすべての少女を好きであるもの，すなわち，少女であるすべてのものをそれが好きであるようなもの，が存在することを主張している．少年であることを表わすのにFを，少女であることを表わすのにGを，好きであることを表わすのにHを用いて，記号で書くと，

(4)　$(\exists x)(Fx\ \&\ (y)(Gy\rightarrow Hxy))$.

第2の前提は，少年であるすべてのものは，いかなる読書狂をも好まないようなもの，すなわち，読書狂であるすべてのものをそれは好まないようなもの，であることを主張している．読書狂であることを表わすのにBを用いて，記号で書けば，

(5)　$(x)(Fx\rightarrow(y)(By\rightarrow -Hxy))$.

われわれが(3)の論証を正当化するために証明する必要のある連式は，それ故

つぎの通りである.

124　$(\exists x)(Fx \,\&\, (y)(Gy \rightarrow Hxy)), (x)(Fx \rightarrow (y)(By \rightarrow -Hxy))$
$\vdash (x)(Gx \rightarrow -Bx)$

1	(1)	$(\exists x)(Fx \,\&\, (y)(Gy \rightarrow Hxy))$	A
2	(2)	$(x)(Fx \rightarrow (y)(By \rightarrow -Hxy))$	A
3	(3)	$Fa \,\&\, (y)(Gy \rightarrow Hay)$	A
3	(4)	Fa	3 &E
3	(5)	$(y)(Gy \rightarrow Hay)$	3 &E
2	(6)	$Fa \rightarrow (y)(By \rightarrow -Hay)$	2 UE
2, 3	(7)	$(y)(By \rightarrow -Hay)$	4, 6 MPP
8	(8)	Gb	A
3	(9)	$Gb \rightarrow Hab$	5 UE
3, 8	(10)	Hab	8, 9 MPP
2, 3	(11)	$Bb \rightarrow -Hab$	7 UE
3, 8	(12)	$--Hab$	10 DN
2, 3, 8	(13)	$-Bb$	11, 12 MTT
2, 3	(14)	$Gb \rightarrow -Bb$	8, 13 CP
2, 3	(15)	$(x)(Gx \rightarrow -Bx)$	14 UI
1, 2	(16)	$(x)(Gx \rightarrow -Bx)$	1, 3, 15 EE

仮定(1)として存在命題がある故，当然(3)の行に，それに対応する代表的選言項を仮定する．そしてそれから結論を導出することをめざす．故に最後の段階で EE が適用される．(4)―(7)の行は，(3)における連言を &E によって「各項目に分け」，(4)，Fa の最も明白な帰結を (7) の行において導くことにあずかるに過ぎない．$(x)(Gx \rightarrow -Bx)$ を証明するために，$Gb \rightarrow -Bb$ を導くことをめざす．故に最後から2番目の段階は UI である．そこで Gb を(8)の行において仮定し，$-Bb$ を導くことをめざす．証明の中心的部分は，主として命題計算の推論であって，(5)と(7)の行の普遍的命題が，特に b に適用され

て，用いられる．このように「両端から」進むことは，証明を発見するためのごく一般的な戦術である．求める証明の中心的部分は多くの場合命題計算の性格をもったものとなり，相対的に容易であろう．

第3につぎの論証を考えよう．

(6)　幾人かの植物学者は奇人である．幾人かの植物学者はいかなる奇人をも好まない．故に幾人かの植物学者はすべての植物学者によっては好まれない．

植物学者であることを表わすのにFを，奇人であることを表わすのにGを，そして好むということを表わすのにHを用いて，(6)の2つの前提をそれぞれつぎのように記号化する．

(7)　$(\exists x)(Fx \;\&\; Gx)$

(8)　$(\exists x)(Fx \;\&\; (y)(Gy \rightarrow -Hxy))$.

結論は，植物学者であって，そして，すべての植物学者によっては好まれないところの，すなわち，すべての植物学者がそれを好むということが真ではないところの，あるものが存在する，ということを主張している．記号で書くと，

(9)　$(\exists x)(Fx \;\&\; -(y)(Fy \rightarrow Hyx))$.

証明を求めるにあたっては，(7)と(8)に対応する代表的選言項が仮定されるのは当然であろう．

(10)　$Fa \;\&\; Ga$

(11)　$Fb \;\&\; (y)(Gy \rightarrow -Hby)$.

このようにして，4つのことがらが実際に知られることになる．そして，普遍的命題$(y)(Gy \rightarrow -Hby)$の特殊な場合として$Ga \rightarrow -Hba$がえられ，これからMPPによって$-Hba$がえられる．さて直観的に言うと，われわれは植物学者（F）であって，すべての植物学者によっては好まれないあるものを求めているのである．aがそのようなものである．なぜならば，Faであって，そして植物学者であるbはaを好まないのだからである．従ってわれ

われはつぎのことを証明すればよいことになる.

(12) $Fa \,\&\, -(y)(Fy \rightarrow Hya)$.

(12)の第1の連言項は(10)から直ちにえられる. 第2の連言項はRAAによって容易に証明される. なぜならば, $(y)(Fy \rightarrow Hya)$ を仮定すれば, 特殊な場合として $Fb \rightarrow Hba$ がえられ, そこから $-Hba$ に矛盾する Hba がえられるからである. この直観的な発見はつぎの通り形式化されることになる.

125 $(\exists x)(Fx \,\&\, Gx)$, $(\exists x)(Fx \,\&\, (y)(Gy \rightarrow -Hxy))$

$\vdash (\exists x)(Fx \,\&\, -(y)(Fy \rightarrow Hyx))$

1	(1) $(\exists x)(Fx \,\&\, Gx)$	A
2	(2) $(\exists x)(Fx \,\&\, (y)(Gy \rightarrow -Hxy))$	A
3	(3) $Fa \,\&\, Ga$	A
4	(4) $Fb \,\&\, (y)(Gy \rightarrow -Hby)$	A
3	(5) Fa	3 &E
3	(6) Ga	3 &E
4	(7) Fb	4 &E
4	(8) $(y)(Gy \rightarrow -Hby)$	4 &E
4	(9) $Ga \rightarrow -Hba$	8 UE
3, 4	(10) $-Hba$	6, 9 MPP
11	(11) $(y)(Fy \rightarrow Hya)$	A
11	(12) $Fb \rightarrow Hba$	11 UE
4, 11	(13) Hba	7, 12 MPP
3, 4, 11	(14) $Hba \,\&\, -Hba$	10, 13 &I
3, 4	(15) $-(y)(Fy \rightarrow Hya)$	11, 14 RAA
3, 4	(16) $Fa \,\&\, -(y)(Fy \rightarrow Hya)$	5, 15 &I
3, 4	(17) $(\exists x)(Fx \,\&\, -(y)(Fy \rightarrow Hyx))$	16 EI
2, 3	(18) $(\exists x)(Fx \,\&\, -(y)(Fy \rightarrow Hyx))$	2, 4, 17 EE
1, 2	(19) $(\exists x)(Fx \,\&\, -(y)(Fy \rightarrow Hyx))$	1, 3, 18 EE

この証明において，(3)と(4)の行は代表的選言項である．(5)–(10)の行は(3)と(4)の直接の帰結を導き出すものである．(11)は RAA を適用するための準備として仮定され，そして求める矛盾が(14)の行においてえられる．(18)の行における EE については，結論が(17)の行において依存する(3)は，‘a’は含むが‘b’は含んではいないことに注意すること．

最後に，幾らかごたごたしているが，しかし妥当な論証を考えよう．これは3変数があとにつづく述語文字を含んでいる．

(13)　すべての人がすべての人に話しかけるならば，ある人が彼らを紹介する．いかなる人も，彼がその両方の人を知っているのでないならば，いかなる人をもいかなる人にも紹介しない．すべての人はウィリアムに話しかける．故にすべての人はウィリアムを知っているある人によってウィリアムに紹介される．

「aはbとcを紹介する」を表わすのに‘$Iabc$’を，「aはbに話しかける」を表わすのに‘Fab’を，「aはbを知っている」を表わすのに‘Gab’を，「ウィリアム」を表わすのに‘m’を用いることにしよう．第1の前提は明らかに，

(14)　$(x)(y)(Fxy \to (\exists z)Izxy)$.

第2の前提を考え直すと，「任意の人を任意の人に紹介するすべての人は，彼らの両方を知っている」となる．これはつぎのように記号化される．

(15)　$(x)(y)(z)(Izxy \to Gzx \ \&\ Gzy)$.

第3の前提は，

(16)　$(x)Fxm$,

そして結論は，

(17)　$(x)(\exists y)(Iyxm \ \&\ Gym)$.

証明を直観的に発見することはいまや困難ではない．aを任意に選ばれた人としよう．すると(16)からつぎのものがえられる．

(18)　Fam.

(14)から，特殊な場合として，つぎのものがえられる．

(19)　$Fam \rightarrow (\exists z)Izam$,

ここから

(20)　$(\exists z)Izam$.

さて，任意に選ばれた人 b が a を m に紹介すると仮定しよう．すると，$Ibam$ であるから，ここから MPP によって(15)から，

(21)　$Gba \ \& \ Gbm$.

これはつぎのものを与える．

(22)　$Ibam \ \& \ Gbm$,

ここから

(23)　$(\exists y)(Iyam \ \& \ Gym)$.

そこで求める結論は，EE と UI によって帰結するであろう．形式的にはつぎのようになる．

126　$(x)(y)(Fxy \rightarrow (\exists z)Izxy)$, $(x)(y)(z)(Izxy \rightarrow Gzx \ \& \ Gzy)$,
$(x)Fxm \vdash (x)(\exists y)(Iyxm \ \& \ Gym)$

1	(1)	$(x)(y)(Fxy \rightarrow (\exists z)Izxy)$	A
2	(2)	$(x)(y)(z)(Izxy \rightarrow Gzx \ \& \ Gzy)$	A
3	(3)	$(x)Fxm$	A
3	(4)	Fam	3 UE
1	(5)	$(y)(Fay \rightarrow (\exists z)Izay)$	1 UE
1	(6)	$Fam \rightarrow (\exists z)Izam$	5 UE
1, 3	(7)	$(\exists z)Izam$	4, 6 MPP
8	(8)	$Ibam$	A
2	(9)	$(y)(z)(Izay \rightarrow Gza \ \& \ Gzy)$	2 UE
2	(10)	$(z)(Izam \rightarrow Gza \ \& \ Gzm)$	9 UE
2	(11)	$Ibam \rightarrow Gba \ \& \ Gbm$	10 UE
2, 8	(12)	$Gba \ \& \ Gbm$	8, 11 MPP

2, 8	(13)	Gbm	12 &E
2, 8	(14)	$Ibam \; \& \; Gbm$	8, 13 &I
2, 8	(15)	$(\exists y)(Iyam \; \& \; Gym)$	14 EI
1, 2, 3	(16)	$(\exists y)(Iyam \; \& \; Gym)$	7, 8, 15 EE
1, 2, 3	(17)	$(x)(\exists y)(Iyxm \; \& \; Gym)$	16 UI

ここで(16)は(1)，(2)および(3)に依存する．なぜならば，(7)は(1)と(3)に依存し，そして(15)は，代表的選言項(8)に依存するとともに，(2)に依存するからである．他のすべての段階は初等的である．

練　習　問　題

1　つぎの連式の妥当性を証明せよ．

(a)　$(x)(y)(z)Fxyz \vdash (z)(y)(x)Fxyz$

(b)　$(x)(\exists y)(z)Fxyz \vdash (x)(z)(\exists y)Fxyz$

(c)　$(\exists x)(\exists y)(z)Fxyz \vdash (z)(\exists y)(\exists x)Fxyz$

2　つぎの論証の妥当性を示せ．

(a)　雨が降るならば，いかなる鳥も幸福でない．雪が降るならば，幾らかの鳥は幸福である．故に雨が降るならば，雪は降らない（「雨が降る」を表わすのに‘P’を，「雪が降る」を表わすのに‘Q’を用いよ）．

(b)　すべての駱駝はやさしい馭者を好む．幾らかの駱駝はモハメッドを好まない．モハメッドは馭者である．故にモハメッドはやさしくない．

(c)　すべての駱駝は大そう興奮する動物である．幾人かの馭者はいかなる大そう興奮する動物をも好まない．故に幾人かの馭者はいかなる駱駝をも好まない．

(d)　幾人かの少女はウィリアムを好きである．すべての少年はいかなる少女をも好きである．ウィリアムは少年である．故にウィリアムを好きであってそしてウィリアムによって好かれるある人が存在する．

(e)　鯨は哺乳動物である．ある魚は鯨である．すべての魚は尻尾をもっ

ている．故にある魚の尻尾は哺乳動物の尻尾である（「a は b の尻尾である」を表わすのに 'Tab' を用いよ）．

第4章　述語計算　2

第1節　形成規則および導出規則

これまではわれわれの述語計算の取り扱いは，わりあい非形式的であった．いまやこの計算に対して，第2章において命題計算に対してなされたのと同じことの少なくとも一部分がなされるべきときである．この節においては，述語計算に対する正確な形成規則を与え，そして量記号を含む4つの導出規則を十分な精密さで述べる．つぎの節では，代入，定理の導入，連式の導入を，述語計算に適用されるようなかたちで論じる．しかし無矛盾性と完全性の結果は証明しない．

第2章第1節の議論と平行して，われわれが取り扱うべき幾種類かの記号に対する，幾つかの直示的定義からはじめよう．第2章における記号の定義がここでも予想される．

第1に，固有名をつぎの符号のひとつとして定義する．

‘m’，‘n’，………

第2に，任意の名前をつぎの符号のひとつとして定義する．

‘a’，‘b’，‘c’，………

第3に，個体変数をつぎの符号のひとつとして定義する．

‘x’，‘y’，‘z’，………

第4に，述語文字をつぎの符号のひとつとして定義する．

‘F’，‘G’，‘H’，………

これら4つの定義のそれぞれにおいて，以前の命題変数の定義におけると同様に，理論的には無限に多くのそのような符号が自由に用いられうるもの

と了解される．このことは，リストに‘………’を加えることによって示されている．われわれは一般に，命題変数との混同の危険が起こりえないときには，‘x’，‘y’，‘z’，………をたんに変数というであろう．実際，いまの目的からいうと，（下の）素文（atomic sentence）の定義にも見られるように，命題変数は述語文字のもとに包摂されるものと考えることができる．

第5に，逆むきのEをつぎの符号であると定義する．すなわち，

‘∃’.

固有名と任意の名前のいずれをも包括する語を導入しておくのが便利なことは明らかである．それ故，第6に，ターム（term）を，固有名あるいは任意の名前であると定義する．タームには変数が含まれないことに注意することが大切である．

第7に，（述語計算の）記号を，括弧，あるいは論理的結合記号，あるいはターム，あるいは個体変数，あるいは述語文字（命題変数を含むものと理解する），あるいは逆むきのE，であると定義する．第8に，（述語計算の）式を，任意の記号系列として定義する．

残るところは，命題計算の場合と同じように，式の全体から，われわれが論理式である（well-formed），あるいは有意味である，とみなしたいものを区別することである．それ故以前と同様に，述語計算の形成規則を与えるものとみなされうる，あるいはわれわれの新しい言語の基本的なシンタックスを述べるものとみなされうる，多くの項目から成る定義を作ることにする．

われわれは素文を定義することからはじめる．素文は，命題変数が命題計算においてはたす役割を，述語計算においてはたすものである．それは複合された wffs がそれから構築される煉瓦のようなものである．この定義および以下の定義において，言語についてのわれわれの議論を容易にするために，ふたたびメタ論理的変数を用いる．非常に複雑なメタ論理的変数の道具立てが必要となることであろう．たとえば，‘P’はその変域が述語文字であるメタ論理的変数として用いられる．‘t’，‘t_1’，‘t_2’，……… はその変域がタームであ

るメタ論理的変数として用いられる．'v'，'v_1'，'v_2'，………はその変域が変数であるメタ論理的変数として用いられる．以上に加えて，なお他の方法も用いられる．

t_1,………, t_n を任意の n 個のターム（必ずしも相異なっていなくてもよい）としよう．そこでは，n は0より大かあるいは0に等しい．そしてPを任意の述語文字としよう．その場合は，

$$Pt_1\cdots\cdots t_n$$

は素文である．言い換えると，素文とは任意の（有限な）個数のタームがあとにつづく述語文字のことである．たとえば，つぎのものは素文である．

'*Fa*'，'*Gm*'，'*Hbn*'，'*Ganmac*'.

しかしながら，つぎのものは素文ではない．'*x*' はタームではないからである．

'*Fx*'，'*Hxan*'.

定義のなかで，タームの個数が0であることが許されている．この極限的な場合には，実際上，命題変数がえられるのである．厳密に言えば，'*F*'，'*G*'，'*H*' はそれらだけで素文とみなされるであろう．しかし述語文字があとにつづくタームをもたない場合には，ふたたび '*P*'，'*Q*'，'*R*' を用いるのが便利であろう．こうして，命題変数とは，述語文字のあとにタームがつづくことのない素文であるとみなされてよいであろう．

われわれはいまや述語計算の論理式 (wff) をつぎのように定義することができる．

(*a*)　任意の素文は wff である．

(*b*)　Aが wff ならば－Aは wff である．

(*c*)　AとBが wffs ならば，(A→B) は wff である．

(*d*)　AとBが wffs ならば，(A＆B) は wff である．

(*e*)　AとBが wffs ならば，(A v B) は wff である．

(*f*)　AとBが wffs ならば，(A⟷B) は wff である．

(*g*)　A(t)をタームtを含むwffとし，vをA(t)のなかに現われることのないある変数としよう．A(v)をA(t)から，tの現われる少なくとも1つの個所を，vによって置き換えることによって結果する式としよう．その場合には，(v)A(v)はwffである．

(*h*)　vをある変数とし，A(v)を(*g*)に述べられているような式であるとしよう．その場合には，(∃v)A(v)はwffである．

(*i*)　式が項目(*a*)−(*h*)によってwffでないならば，wffでない．

この定義については幾らか議論する必要がある．それはまず第1に，第2章における，命題計算の論理式の定義と比較されねばならない．新しい項目(*a*)は，もとの項目(*a*)の，「命題変数」を「素文」に置き換えた，拡張である．wffsを作るための，われわれの基本的な材料は，今度は，命題変数も含むけれども，その他にも多くのものを含む．項目(*b*)−(*f*)は2つの定義において同じである．その結果，命題計算の任意のwffは，また述語計算のwffでもある．かくして言語としての述語計算は，命題計算の拡大である．項目(*g*)と(*h*)は，それぞれ，普遍量記号と存在量記号を導入する．そして項目(*i*)は例によって，wffでないものを排除する項目，つまり一番最後に出てくる項目である．

項目(*g*)と(*h*)はどのように実行すればよいのかわかりにくい．それらを理解するには例によるのが最もよい．つぎの式がwffであることを示すことが求められているとしよう．

(1)　$(x)(Fx \rightarrow Gx)$.

第1に，'*Fx*'も'*Gx*'もwffではない．なぜならば，'*x*'はタームではなく変数だからである．故に'$(Fx \rightarrow Gx)$'もまたwffではない．これがそうあるべきである理由は，われわれのwffsはすべて命題を表現することが望まれるが，しかるに'*Fx*'は命題を表現しないからである――変数を含む式は，大まかに言えば，その変数が量記号に縛りつけられていて，宙に浮いたまま

になっていないときにのみ，真または偽なる命題を表現するであろう．変数は，前後参照のための方便と理解されるべきであって，名前と考えられるべきではない．だから，「xは性質Fをもつ」と言うことは，何物もここでは名指されてはいないのであるから，真なることをも偽なることをも言っているのではない．しかしながら，'$(x)Fx$' と言うことは，すべてのものが性質Fをもつと言うことである．従って，真または偽なることを言うことなのである．

'$(Fx \rightarrow Gx)$' は wff ではないが，'$(Fa \rightarrow Ga)$' は wff である．なぜならば，'Fa' と 'Ga' は，'Fx' や 'Gx' とは違って，素文だからである．（g）の項目において，tをターム'a'とし，A(t) をこのタームを含む wff '$(Fa \rightarrow Ga)$' としよう．またvを変数'x'としよう．すると'$(Fx \rightarrow Gx)$'は，A(t) すなわち'$(Fa \rightarrow Ga)$'から，'a'の現われる少なくとも1つの個所を'x'によって置き換えることによって（実際は'a'の現われる個所は2つながら置き換えられている），結果する式である．従って'$(Fx \rightarrow Gx)$'は，論理式ではないが，項目(g)のA(v) に相当する．故に項目(g)により，'(x)'を'$(Fx \rightarrow Gx)$'の前に置いた結果は wff である．換言すれば(1)は wff である．

同様にして，'$(Fa \rightarrow Ga)$'を'$(Fx \rightarrow Ga)$'または'$(Fa \rightarrow Gx)$'に変形することによって（すなわち，'a'の現われる個所の1つのみを'x'に変えることによって），項目(g)により，つぎの2つの式が wffs であることが示される．

(2)　$(x)(Fx \rightarrow Ga)$

(3)　$(x)(Fa \rightarrow Gx)$.

しかしつぎの式，

(4)　$(x)(Fa \rightarrow Ga)$

が wff であることを示す方法はない．というのは，項目(g)は，vが A(v) のなかのどこかに現われるべきことを，実際上規約しているのに，'$(Fa \rightarrow Ga)$' のなかには'x'は現われないからである．量記号'(x)'の作用が及ぶ変数の現われる個所がない故，われわれは(4)を wff とみなすことを望まないのであ

る.

項目(g)によってわれわれは，あるタームtを含む wff A(t) から，tが現われる幾つかの個所において，tのかわりに量記号に縛りつけられていない変数vを含む，非論理式 A(v) を通って，vの現われる個所がすべて前に置かれた量記号の作用を受けることになる新しい wff (v)A(v) へと，導かれる．このようにして，(4)，'$(x)P$'，'$(x)Fm$' のような表現が wffs とはならないようにするのである．

(g)のさらにもう1つの規約は，v は A(t) のなかには現われないものとする，ということである．この規約がないと，つぎの式は wff になるであろう．

(5)　$(x)(x)Fxx$

なぜならば，'Faa' は素文であり，そのことから項目(g)によって，実際 '$(x)Fxa$' は wff である (A(v) を 'Fxa' と考えよ)．'$(x)Fxa$' を A(t)，'a' をt，'x' をvと考えるならば，A(v) を表わすものとして，'$(x)Fxx$' がえられるであろう．そしてここから，(5)は wff となるであろう．(5)を wff から除外したいとわれわれが考えるのは，'F' のうしろの 'x' が現われる2つの個所が，第2の量記号の作用を受けるために，第1の普遍量記号が全く働いていないことによるのである．実際に(5)は 'x' が既に '$(x)Fxa$' のなかに現われ，その結果(g)の適用に際して用いられることができない故に，(g)によって wff でない．もちろんvとして 'y' を選び，そしてその結果つぎの式が wff であることを示すことはできる．

(6)　$(y)(x)Fxy$.

(g)の用法のさらにもうひとつの例として，つぎの2つの式を比較してみよう．

(7)　$(x)(Fx\rightarrow(x)Gx)$

(8)　$((x)Fx\rightarrow(x)Gx)$.

すると(7)は wff ではないが，(8)は wff である．'$(x)Fx$' も '$(x)Gx$' も明ら

かに wff であるから，(8)は項目(b)によって wff であるとみなされうる．(7)は，v は A(t) のなかには現われないものとする，という項目(g)における規約によって，wff であることから除外される．(7)を作り出すことができる可能な wffs A(t) は，'$(Fa \to (x)Gx)$'，'$(Fm \to (x)Gx)$' のような式のみであるが，これらは既に変数 'x' を含んでいる．もちろん，新しい変数，たとえば 'y' を選ぶことによって，つぎの式が wff であることを示すことはできる．

(9)　$(y)(Fy \to (x)Gx)$.

'Fx'，'$(Fy \to (x)Gx)$'，'Hxy' のような式は，「縛られていない」変数 'x' および 'y' が含まれていることから考えて，真または偽なる命題を表現する完全な文ではないことから，われわれのいまの定義によって wff とはみなされないのではあるが，以下においては，それらの式に対する呼び名のある方が便利である．われわれは論理学の伝統に従って，「命題関数」(propositional function)[1] の名を用いるであろう．くわしく言えば，$(v_1)\cdots\cdots(v_n)A$ が wff ならば，式Aは，$n \geqq 0$ なる n に対して，変数 $v_1, \cdots\cdots, v_n$ に関する命題関数である．たとえば，'Hxy' は '$(x)(y)Hxy$' が wff であるから，'x' および 'y' に関する命題関数である．'$(Fy \to (x)Gx)$' は，(9)が wff であるから，'y' に関する命題関数である．しかし '$(Fx \to (x)Gx)$' は，上に見たように，(7)が wff でないから，'x' に関する命題関数ではない．簡単に言うと，wffs からそのはじめにある量記号を除去した結果えられる式は命題関数である．(g)の項目において，A(v) は v に関する命題関数であろう．$n=0$ の場合を許すことによって，すべての wff は，トリヴィアルな意味において，0個の変数に関する命題関数である．従ってわれわれは，「命題関数」を，wffs を包括する一般的な呼び名として用いることができ，そして実際に，これからそうすることにする．

(h)の項目は，普遍量記号の場合に用いられたのと正確に同じ条件のもとにおいて，存在量記号をわれわれの記号法に導入するに過ぎないから，とり

たてて議論する必要もない.

われわれは，2つの量記号をシンタックスの上から，つぎのように定義する．普遍量記号は，左側の括弧のあとに変数がつづき，そのあとに右側の括弧がつづくものである．存在量記号は，左側の括弧のあとに逆むきのEがつづき，そのあとに変数がつづき，そのあとに右側の括弧がつづくものである．量記号は，普遍記号であるか，もしくは存在量記号である．つぎに，作用範囲の概念は，命題計算から述語計算へ持ち越される．命題関数のなかに現われる論理的結合記号の作用範囲は，それが現われる最小の命題関数である．たとえば wff (9) において，（ただ1つの個所に現われる）'→' の作用範囲は，'$(Fy\rightarrow(x)Gx)$' であって，これは 'y' に関する命題関数であり，wff ではない．同様に，命題関数のなかに現われる量記号の作用範囲は，それが現われる最小の命題関数である．たとえば (8) において，第1の '(x)' の作用範囲は '$(x)Fx$' であり，また第2の '(x)' の作用範囲は '$(x)Gx$' である．(9) においては，（ただ1つの個所において現われる）'(y)' の作用範囲は wff (9)の全体である．(6)においては，'(y)' の作用範囲は wff (6)の全体であるが，'(x)' の作用範囲は '$(x)Fxy$' である——この場合には，命題関数であって wff ではない．命題関数 '$(Fy\rightarrow(x)Gx)$' においては，'(x)' の作用範囲は wff '$(x)Gx$' である.

作用範囲の概念を用いて，項目(g)および(h)の意味をつぎのように述べることができるであろう.

(i) wff または命題関数において，量記号が現われる任意の個所の作用範囲は，問題になっている変数が現われる少なくとも2つの個所を含むであろう（その1つの個所は量記号そのもののなかにある）;

(ii) wff または命題関数において，量記号が現われる任意の個所の作用範囲は，同じ変数を用いたいかなる他の量記号をも含まないであろう.

たとえば(4)が wff でないというのは，(i)に照らして言われるのである．なぜならば，‘x’の現われる個所はただひとつ，量記号自身のなかにしかないからである．また(ii)に照らして，(5)と(7)は wff でない．なぜならば，第1の‘(x)’の作用範囲と推定されるもののなかに，いずれの場合にも，さらにもうひとつ‘(x)’があるからである．(8)はこの欠点をまぬがれている．なぜならば，2つの量記号の作用範囲のいずれのひとつも他方に含まれないからである．(i)と(ii)が要求される動機は，もはや明瞭なのでなければならない．(i)によって，すべての量記号はその変数の現われるある個所に作用を及ぼす．すなわち量記号が空虚な意味で (vacuously) 用いられることは決してない．(ii)によって，その作用範囲のなかにおいて，量記号の変数の現われるすべての個所は，その量記号の作用を受けるが，何か他の量記号の作用を受けることはない．(i)および(ii)を保持するためには，われわれは形成規則が複雑になるという点で，ある程度の代価を払うことになる．しかし導出規則ならびに他の導出された規則を述べる際に，これをつぐなうに足る単純性がえられるのである．

括弧に関しては，項目(g)および(h)は，前後の括弧を必要としないという点で，‘$-$’に対する項目(b)と同じであることに注意すべきである．項目(c)−(f)における，括弧の要求によって，多義性は除去される．こうして‘(y)’の作用範囲が wff の全体である(9)は，つぎの，‘(y)’の作用範囲が‘$(y)Fy$’のみである wff と対照されるべきである．

(10)　$((y)Fy \to (x)Gx)$.

(9)は普遍的命題を表現するが，(10)は，その前件と後件が普遍的命題である条件命題を表現する．両者の区別は，項目(c)において‘$\to$’に対して要求される括弧によって確かめられる．理論上はともかく実際においては，以前と同様，最も外側の括弧を除去し，また第2章第1節において導入された命題結合記号のランキングによって，可能な場合には内側の括弧をも除去することが許される．

最後に，述語計算の wffs $A_1,\cdots\cdots, A_n$, B が与えられたならば，

$$A_1,\cdots\cdots, A_n \vdash B$$

を述語計算の連式表現であると言う．

述語計算のシンタックスが正確に定式化されると，われわれはその導出規則をかなり容易に述べることができるであろう．第1に，命題計算に対する10個の原始的導出規則は，全体として引き継がれ，そして今度は述語計算の wff に適用されるものと了解される．このことから直ちに，任意の導出可能な命題計算の連式は，また述語計算の導出可能な連式であることが確かめられる．述語計算特有の4つの規則に関しては，つぎのようにして進む．

UE および EI: A(v) をvに関する命題関数，t をタームとしよう．また A(v) においてvが現われるすべての個所を，またその個所のみを，t によって置き換えた結果を A(t) としよう．その場合には，(v)A(v) が与えられるならば，UE は結論 A(t) を導くことを許す．また，A(t) が与えられるならば，EI は結論 (∃v)A(v) を導くことを許す．いずれの場合にも，結論は前提と同じ仮定に依存する．

UI および EE : A(e) を任意の名前eを含む wff とし，vを A(e) のなかには現われることのない変数としよう．A(e) においてeが現われるすべての個所を，またその個所のみを，vによって置き換えた結果えられる，vに関する命題関数を A(v) としよう．その場合には，A(e) が与えられるならば，A(e) の依存する仮定のなかにはeが現われないとすれば，UI は結論 (v)A(v) を導くことを許す．結論は前提と同じ仮定に依存する．また，(∃v)A(v) が与えられ，そして，A(e) を仮定してえられるある wff C の証明が同時に与えられるならば，eがCのなかにも，また A(e) からCを導出するために用いられる (A(e) そのもの以外の) いかなる仮定のなかにも現われないとするならば，EE は結論Cを導くことを許す．結論Cは，(∃v)A(v) が依存する，あるいは A(e) からCを導出するために用いられる (A(e) そのもの以外の) すべての仮定に依存する．

UE と EI に関しては，われわれはまず第1に，A(v) がｖに関する命題関数ならば，(v)A(v) も A(t) も，定義された通り，wff となるであろうということに注意する．たとえば，ｖを‘x’，A(v) を，‘$Fx \to Gxam$’，そしてｔを‘a’と考えると，(v)A(v) は‘$(x)(Fx \to Gxam)$’であり，A(t) は‘$Fa \to Gaam$’であって，両者いずれも wff である．また，ここでは‘a が既に‘$Fx \to Gxam$’のなかに現われているから，ｔが既に A(v) のなかに現われているかどうかは問題ではないことに注意しよう．‘$Fa \to Gaam$’を‘$(x)(Fx \to Gxam)$’から推論することは，明らかに全く健全である．第3に，そうしないと結果が wff にならないであろうという理由しかないとしても，ｖの現われるすべての個所において，ｖをｔによって置き換えなければならないことに注意しよう．そして最後に，推論の順序において逆であるということを除けば，EI の扱い方は UE の扱い方と正確に同じである．すなわち，EI の適用が健全であるかどうかを知るためには，われわれはそれを逆の順序において UE の適用と考え，それをチェックすればよいのである．たとえば，‘Fa & Gb’から‘$(\exists x)(Fx$ & $Gx)$’へ進むのは，EI の不健全な適用によるものである．なぜならば，‘$(x)(Fx$ & $Gx)$’から‘Fa & Gb’へ進むのは，UE の不健全な適用によるものにほかならないからである．（何故か？）2つの規則はこの点において対称的である．

UI と EE に関しては，まず第1に，ｖは A(e) のなかには現われないから，A(v) はｖに関する命題関数であろうということに注意せねばならない．なぜならば，A(v) は，ｖを用いた量記号を含まないであろうが，ｖを含むであろうからである．故に (v)A(v) と (∃v)A(v) はいずれも wffs であろう．UI を適用するにあたっては，それ故，既に前提のなかに現われているのではないある変数を選ぶ必要がある．われわれは，‘$Fa \to (x)Gx$’から‘$(x)(Fx \to (x)Gx)$’へと進むことはできない．なぜならば，ここに結論と考えられている式は wff ではないからである．もっとも，制限が守られるならば，‘$(y)(Fy \to (x)Gx)$’へと進むことはできる．逆に，EE を用いようとし，

$(\exists v)A(v)$に対応する適当な代表的選言項をえようとする場合には，$(\exists v)A(v)$のなかに既に現われているのではない，任意の名前 e を選び，命題関数 $A(v)$ においてvが現われるすべての個所において，またその個所においてのみ，vのかわりにeを用いるのでなければならない．このようにして，vがそのなかに現われないような，またvがeの個所に戻されるときには，ふたたびもとの $A(v)$ が結果するような，$A(e)$ がえられるのである．たとえば，$(\exists v)A(v)$ として wff '$(\exists x)(Fa\rightarrow Gxb)$' が与えられる場合に，eを'*a*'あるいは'*b*'ではなく，'*c*'として選び，'$Fa\rightarrow Gcb$'を $A(e)$ として仮定する．その場合には，'*x*'としてのvに対する $A(v)$ は，事実，命題関数'$Fa\rightarrow Gxb$'であろう．UI と EE は，$(v)A(v)$ が $A(e)$ から UI によって帰結するちょうどその場合に，$A(e)$ が $(\exists v)A(v)$ に対する代表的選言項であるという点において，UE と EI と同様に，一種の対称性を示すことは，恐らく注意しておいてよいことであろう．

ここに UI と EE に対して与えられた制限は，前章においてわれわれが直観的に与えた制限にほかならないことを，読者は注意していただきたい．また，前章において行なわれた4つの規則すべての適用は，この章におけるそれらの正確な定式化に照らして正しい，ということに満足していただきたい．より難かしい問題がどのようなものであるかの，ひとつの見本を示しただけで十分としておこう．

練習問題

1　つぎの式のそれぞれについて，それが wff であるか，wff でない命題関数であるか，あるいはそのいずれでもないかを述べよ．それが wff である場合には，そのことの証明を wff の定義から与えよ．

(*a*)　$(x)Gxa$

(*b*)　$(x)Gya$

(*c*)　$(x)Gxy$

(*d*)　$(\exists x)(Fa \,\&\, Gx)$

(*e*)　$(\exists y)(Fx \,\&\, Gxy)$

(*f*)　$(x)(\exists y)(\exists z)(Fy \vee Gz \rightarrow Hayz)$

(*g*)　$(\exists x)(\exists y)(Fx \vee Gy \rightarrow (\exists z)Hayz)$

(*h*)　$(\exists x)(\exists y)(Fx \rightarrow (z)(Gz \rightarrow (\exists x)Hxyz))$

(*i*)　$(\exists x)((Fx \rightarrow (z)(Gz \rightarrow (\exists u)Hxyu))$

(*j*)　$(\exists y)((\exists x)Fx \rightarrow (z)(Gz \rightarrow (\exists x)Hxyu))$

2　つぎに試みられている UE の適用のそれぞれについて，それが正しいか，正しくないか，また正しくないならば，何故正しくないかを，述べよ．

(*a*)　1　(1) $(x)(\exists z)(Fxz \,\&\, Gxz)$　A
　　　1　(2) $(\exists z)(Faa \,\&\, Gaz)$　1 UE

(*b*)　1　(1) $(x)(\exists z)(Fxz \,\&\, Gxz)$　A
　　　1　(2) $(\exists z)(Faz \,\&\, Gbz)$　1 UE

(*c*)　1　(1) $(x)(\exists z)(Fxz \,\&\, Gxz)$　A
　　　1　(2) $(\exists z)(Fbz \,\&\, Gbz)$　1 UE

3　つぎに試みられている EI の適用のそれぞれについて，それが正しいか，正しくないか，また正しくないならば，何故正しくないか，を述べよ．

(*a*)　1　(1) Fba　A
　　　1　(2) $(\exists y)Fby$　1 EI

(*b*)　1　(1) Fba　A
　　　1　(2) $(\exists x)Fxx$　1 EI

(*c*)　1　(1) Fba　A
　　　1　(2) $(\exists y)Fya$　1 EI

(*d*)　1　(1) Fba　A
　　　1　(2) $(\exists x)Fxb$　1 EI

(*e*)　1　(1) $(\exists x)Fxa$　A
　　　1　(2) $(\exists y)(\exists x)Fxy$　1 EI

(*f*)　1　(1)　$(\exists x)Fxa$　　A

　　1　(2)　$(\exists y)(\exists x)Fxx$　　1 EI

4　つぎに試みられている UI の適用のそれぞれについて，それが正しいか，正しくないか，また正しくないならば，何故正しくないか，を述べよ．'*a*' も '*b*' も，仮定(1)のなかには現われないものと仮定せよ．

(*a*)　1　(3)　$Fab \rightarrow (x)Gax$

　　1　(4)　$(y)(Fyb \rightarrow (x)Gyx)$　　3 UI

(*b*)　1　(3)　$Fab \rightarrow (x)Gax$

　　1　(4)　$(x)(Fxb \rightarrow (x)Gxx)$　　3 UI

(*c*)　1　(3)　$Fab \rightarrow (x)Gax$

　　1　(4)　$(y)(Fay \rightarrow (x)Gax)$　　3 UI

(*d*)　1　(3)　$Fab \rightarrow (x)Gax$

　　1　(4)　$(y)(Fyy \rightarrow (x)Gyx)$　　3 UI

5　つぎの wffs の対のそれぞれについて，第2のものが，EE の適用において，第1のものに対する適切な代表的選言項であるかどうかを述べよ．もし適切でないならば，その理由を述べよ．

(*a*)　(i)　$(\exists x)(Fxa \;\&\; (y)Gby)$

　　(ii)　$Fba \;\&\; (y)Gby$

(*b*)　(i)　$(\exists x)(Fxa \;\&\; (y)Gby)$

　　(ii)　$Fca \;\&\; (y)Gcy$

(*c*)　(i)　$(\exists x)(Fxa \;\&\; (y)Gby)$

　　(ii)　$Fca \;\&\; (y)Gby$

(*d*)　(i)　$(\exists x)(Fxa \;\&\; Gbx)$

　　(ii)　$Fca \;\&\; Gbc$

(*e*)　(i)　$(\exists x)(Fxa \;\&\; Gbx)$

　　(ii)　$Fba \;\&\; Gbb$

(*f*)　(i)　$(\exists x)(Fxa \;\&\; Gbx)$

(ii) $Fbm \& Gbm$

注1）「関数」という語について，ここにひとこと述べておくのも不都合ではないであろう．'$x+y$' は x と y の数的関数である（を表現する）．なぜならば，与えられた数 x と y に対して，$x+y$ は特定の数だからである．'Fxy' は，ある話の世界に属している与えられた個体 x および y に対して，Fxy が特定の命題であるという意味において，x および y に関する命題関数である．

第2節　代入，導出された規則，無矛盾性，および完全性

述語計算の定理という概念は，命題計算の定理のそれに似ている．定理とは，仮定の個数が0であるような，述語計算の証明可能な連式の結論である．ここから直ちに言えることであるが，命題計算のすべての定理は，より広い意味における定理となる．また，前章において証明されたそれぞれの連式に対応して，与えられた証明を CP の適用によって補なうことによって，定理として証明されうる条件法が存在する，ということもまた明らかでなければならない．たとえば，連式 103 および 105 に対応して，つぎの定理がある．

127　$\vdash (x)(Fx \to Gx) \to ((x)Fx \to (x)Gx)$

128　$\vdash (x)(Fx \to Gx) \to ((\exists x)Fx \to (\exists x)Gx)$.

述語計算のレベルにおいて，矛盾律(37)，同一律(38)，および排中律(44)に対応する他の定理はつぎの通りであるが，証明はすべて容易である．

129　$\vdash (x) - (Fx \& -Fx)$

130　$\vdash (x)(Fx \to Fx)$

131　$\vdash (x)(Fx \vee -Fx)$.

命題計算におけると同じく述語計算の定理も，論理的真理，すなわち論理的根拠にのみ基づいて真である命題を表わすものと考えられてよいであろう．前に，命題計算の定理がもっていることが知られた重要な性質は，P，Q，R，……のかわりにどのような命題が選ばれても，それは論理的真理でありつづけるということであった．この事実をわれわれは，定理の任意の代入例は定

理であるという，代入の原理（S1）に表現したのであった．述語計算においても，その定理は，F，G，H，…… のかわりにどのような性質が選ばれても，論理的真理でありつづけるであろうと考えるのが自然である．それ故われわれは，たんに命題変数のみならず，述語文字一般に対する代入について言えるような，代入例の概念の適当な拡張を，まず第1に求めるのである．

便宜上，性質を，命題関数によって表現されるものと考えてよいであろう．たとえば，性質Fは，'x' に関する命題関数 'Fx' によって表現される．FでもありまたGでもある，という性質は，'x' に関する命題関数 'Fx & Gx' によって表現される．すべてのものに対してFという関係をもつ，という性質は，'x' に関する命題関数 '$(y)Fxy$' によって表現される．同様に，関係を，1つ以上の変数に関する命題関数によって表現されるものと考えてよいであろう．たとえば，'x' および 'y' に関する '$(\exists z)(Gxz$ & $Gzy)$' は，それに対してGという関係をもつものに対してGという関係をもつという，複雑な関係を表現する．（'G' を「の親である」(parent of) と解釈すると，新しい関係は「の祖父〔母〕である」(grandparent of) である．）そこで代入の問題は，wffs のなかで，ある数のタームあるいは変数があとにつづく述語文字を，同じ数の変数に関する命題関数によって，どのようにして置き換えることができるかという問題である．

単純な例を挙げることによって，このことは明瞭になるであろう．定理131について考えてみよう．2個所に現われる 'Fx' が 'x' に関する任意の命題関数によって置き換えられるならば，その結果を代入例とみなそうというのがわれわれの望むところであろう．たとえば，'$(Fx$ & $Gx)$' を選ぶとつぎの結果がえられる．

(1)　$(x)((Fx \mathbin{\&} Gx) \vee -(Fx \mathbin{\&} Gx))$.

あるいは '$(y)Fxy$' を選ぶとつぎの結果がえられる．

(2)　$(x)((y)Fxy \vee -(y)Fxy)$.

そしてこれらはいずれも，131と同じだけ，論理的真理を表わしているので

なければならない．なぜならば，131は，現実にどのような性質を性質Fとして選ぶかということからは独立に，真であると考えられるからである．

しかしながら，代入例の概念を十分一般的に説明することには，ある困難が含まれる．まず第1に，容易に証明される定理$(x)Fx\rightarrow(y)Fy$（115参照）を考えてみよう．Fを，FでもありまたGでもあるという性質によって置き換えようとするならば，'Fx' のかわりには '$(Fx \& Gx)$'，しかし 'Fy' のかわりには '$(Fy \& Gy)$' とおく必要があるだろう．あるいは定理$(x)Fx\rightarrow Fa$を考えてみよう．同じ置換をしようとすると，この場合には，'Fx' のかわりには '$(Fx \& Gx)$'，しかし 'Fa' のかわりには '$(Fa \& Ga)$' とおく必要がある．言い換えると，述語文字に対する代入においては，われわれはただ同じ式を，述語文字が現われるそれぞれの個所に置いて行こうとするだけではないであろう．何を置くかは，どのようなタームまたは変数が述語文字のあとにつづくかに，ひとつには依存している．第2に，代入の結果として wff がえられるためには，与えられた命題関数のなかの量記号のなかに現われるある変数を変える必要があるかも知れない．たとえば，'$(x)Fx\rightarrow(y)Fy$' のなかの 'F' を '$(y)Fxy$' によって置き換えるならば，'$(x)(y)Fxy\rightarrow(y)(y)Fyy$' がえられるであろうが，しかるにこの式は '$(y)$' が重複する点から考えて wff でない．従ってわれわれは，変数の衝突を避けるために，明らかに同じ性質を表現する命題関数 '$(z)Fxz$' を用いねばならないのである．こうすれば正しい結果 '$(x)(z)Fxz\rightarrow(y)(z)Fyz$' がえられる．

こうしたことを念頭において，ここに全く一般的に代入例を定義しよう．タームと変数の両方に対する，かりの呼び名を作っておくと便利であろう．われわれはそれらをたんに文字 (letters) とよぶことにしよう．従って 'a'，'b'，'m'，'n，'x'，'y'，等はすべて文字である．

Aを，n個の文字があとにつづく述語文字P（が現われる個所）を含む，述語計算の wff であるとしよう．n個の相異なる変数 $v_1, \cdots\cdots, v_n$ に関する命題関数を $Q(v_1, \cdots\cdots, v_n)$ とし，$Q(v_1, \cdots\cdots, v_n)$ のなかの量記号において用

いられている変数が，Aのなかに現われることはないものとしよう．n個の文字 $l_1, \cdots\cdots, l_n$ の任意の組に対して，$Q(l_1, \cdots\cdots, l_n)$ を，v_1 を l_1 によって，v_2 を l_2 によって，……，v_n を l_n によって，$Q(v_1, \cdots\cdots, v_n)$ の全体にわたって置き換えた結果であるとしよう．A′は，AのなかにおいてPl_1 …… l_n が現われるそれぞれの個所を，文字 $l_1, \cdots\cdots, l_n$ に関して，$Q(l_1, \cdots\cdots, l_n)$ によって置き換えた結果として，Aからえられるものであるとしよう．その場合には，A′はAから代入によって結果すると言われる．

A′はAから，大ざっぱに言うと，Aにおけるひとつの述語文字がAの全体を通じて，ある命題関数からえられる表現によって，適切に置き換えられる場合に，代入によってえられるのである．Aにおける述語文字に対する多重的代入を考慮に入れるために，われわれはつぎのように言う．すなわち，Aが第1の wff であり，各 wff がその系列の前にある wff から代入の結果としてえられる wff であり，そして A′が最後の wff であるような wffs の系列が存在する場合に，A′はAの代入例である．従ってA′は，それがある wff から代入によってえられ，その wff が今度はある wff から代入によってえられ，……，その wff が今度はAから代入によってえられる場合に，Aの代入例である．極限的な場合として，Aがトリヴィアルにそれ自身の代入例とみなされることを認めてよいであろう．

わたしはこの定義を，実際の場面において出会うことになりそうな，どのような例にも劣らず複雑なひとつの例によって，説明しよう．Aを

(3)　$(x)(Fxa \rightarrow Fba) \rightarrow (\exists y)((x)Fxx \rightarrow Fby)$

とし，そして変数‘y’および‘z’に関するつぎの命題関数を考えよう．

(4)　$(u)(Fuyz \ \& \ Gzya)$.

Pを2つの文字があとにつづく，(3)における述語文字‘F’であるとしよう．すると，(4)は代入のための適切な $Q(v_1, \cdots\cdots, v_n)$ である．なぜならば，それは2変数‘y’および‘z’に関する命題関数であって，量記号のなかにあるそのただ1つの変数，すなわち，‘u’は(3)のなかには現われないからである．

(3)のなかには，考慮すべき4つの，'F'が現われる個所がある．すなわち，

(i)　Fxa

(ii)　Fba

(iii)　Fxx

(iv)　Fby

(4)の全体を通じて，'F'のあとに現われる第1と第2の文字を，それぞれ'y'と'z'に置き換えることによって，命題関数(4)に対応する4つの書き換えがえられる．これはつぎのようになる．

(i)′　$(u)(Fuxa \,\&\, Gaxa)$

(ii)′　$(u)(Fuba \,\&\, Gaba)$

(iii)′　$(u)(Fuxx \,\&\, Gxxa)$

(iv)′　$(u)(Fuby \,\&\, Gyba)$.

こうして，(i)′−(iv)′が，(i)−(iv)によって与えられる $\mathrm{Pl}_1 \cdots\cdots \mathrm{l}_n$ に対する，$\mathrm{Q}(\mathrm{l}_1, \cdots\cdots, \mathrm{l}_n)$ である．いま(3)において，(i)−(iv)を(i)′−(iv)′によって置き換えるならば，つぎのものがえられる．

(5)　$(x)((u)(Fuxa \,\&\, Gaxa) \rightarrow (u)(Fuba \,\&\, Gaba)) \rightarrow$
$(\exists y)((x)(u)(Fuxx \,\&\, Gxxa) \rightarrow (u)(Fuby \,\&\, Gyba))$.

すると(5)は，上に与えられた定義によって，(3)から代入によって結果することになり，従って(3)の代入例である．

$n=0$ の場合については，述語文字Pはたんに命題変数であり，また命題関数 $\mathrm{Q}(\mathrm{v}_1, \cdots\cdots, \mathrm{v}_n)$ はたんに wff である．その場合には，置換は，Aにおいてある命題変数が現われるすべての個所に，組織的にある wff をおいて行くことにほかならず，代入例の概念は既に命題計算に対して定義されたそれに帰着する[1]．従ってわれわれの以前の代入例の概念は，いま定義したものの特殊な場合に過ぎない．

われわれはいまや，述語計算に対する代入の原理を述べることができる．

(S′1)　証明された定理の任意の代入例に対して証明を見出す

ことができる．

この原理は自明であるどころではない．そして証明は容易ではない．それをここで証明することは，この書物の程度を越えるものである．（関心をもたれる向きは，たとえば，Church〔2〕，§35 を参照していただきたい．）しかし証明は，まず第1に，代入例はつねに wff であること（トリヴィアルな結果ではない）を示し，第2に，Aの証明は，4つの量記号の規則が依然として正しく適用されるような仕方で，Aの任意の代入例の証明に変形されうることを示すことにあるであろう．これは規則 UI と EE に対する制限のために，一般に全く困難なく示されるわけではない．新しい証明においては，そこに用いられる任意の名前を改名すべき理由がある．なぜならば，もとの証明にはでてこない任意の名前が代入例に導入されるであろうからである．

最後に，代入例の概念は連式一般に拡張されねばならない．これは，対応する条件法の概念によって行なうのが最も簡単である．以前と同様に，

$$A_1, \cdots\cdots, A_n \vdash B$$

が連式表現ならば，それに対応する条件法はつぎの wff である．

$$A_1 \rightarrow (\cdots\cdots(A_n \rightarrow B)\cdots\cdots).$$

そこで，

$$A_1', \cdots\cdots, A_n' \vdash B'$$

は，この連式表現に対応する条件法が，つぎの連式表現に対応する条件法の，定義された意味における代入例であるならば，その連式表現，

$$A_1, \cdots\cdots, A_n \vdash B$$

の代入例である．このことは，(S′1) を特殊な場合として含む，つぎの一般的な代入の原理に導く．

(S′2)　証明された連式の任意の代入例に対して証明を見出すことができる．

この仕事はあとに残しておくことにして，導出された規則 TI と SI が，述語計算に対して直ちにえられる[2)]．それらは第2章からそのまま持ってくる

ことができるのであって，新しい述語計算のレベルにおけるその根拠づけに，新しい困難があるわけではない．命題計算におけると同様，これらの導出された規則は，証明の重荷を非常に軽くする．

これらの導出された規則は，つぎの証明において例示されている．

132 $(x)Fx \vdash (x)(Gx \rightarrow Fx)$

1	(1)	$(x)Fx$	A
1	(2)	Fa	1 UE
1	(3)	$Ga \rightarrow Fa$	2 SI(S) 50
1	(4)	$(x)(Gx \rightarrow Fx)$	3 UI

133 $(x)-Fx \vdash (x)(Fx \rightarrow Gx)$

1	(1)	$(x)-Fx$	A
1	(2)	$-Fa$	1 UE
1	(3)	$Fa \rightarrow Ga$	2 SI(S) 51
1	(4)	$(x)(Fx \rightarrow Gx)$	3 UI

134 $(\exists x)Fx \rightarrow (\exists x)Gx \vdash (\exists x)(Fx \rightarrow Gx)$

1	(1)	$(\exists x)Fx \rightarrow (\exists x)Gx$	A
2	(2)	$-(\exists x)(Fx \rightarrow Gx)$	A
2	(3)	$(x)-(Fx \rightarrow Gx)$	2 SI(S) 3.4.1(*d*)
2	(4)	$-(Fa \rightarrow Ga)$	3 UE
2	(5)	$Fa \,\&\, -Ga$	4 SI(S) 2.2.5(*g*)
2	(6)	Fa	5 &E
2	(7)	$-Ga$	5 &E
2	(8)	$(\exists x)Fx$	6 EI
2	(9)	$(x)-Gx$	7 UI
1, 2	(10)	$(\exists x)Gx$	1, 8 MPP
1, 2	(11)	$-(x)-Gx$	10 SI(S) 113
1, 2	(12)	$(x)-Gx \,\&\, -(x)-Gx$	9, 11 &I

1　(13) $--(\exists x)(Fx\rightarrow Gx)$　2, 12 RAA

1　(14) $(\exists x)(Fx\rightarrow Gx)$　13 DN

132と133は50と51，すなわち質料的含意のパラドックス，に類似した連式である．それらは形式的含意のパラドックス (paradoxes of formal implication) とよばれてもよいであろう（「形式的含意」という用語は，質料的含意の普遍量化，すなわち‘$(x)(Fx\rightarrow Gx)$’の形式の命題を言い表わすためにラッセルが造ったものである）．132は，すべてのものがFをもつならば，そのことから，すべてのGをもつものはFをもつ（Gがどのような性質であっても），ということが帰結すると言うのである．133は，いかなるものもFをもたないならば，そのことから，すべてのFをもつものはGをもつ（Gがどのような性質であっても），ということが帰結すると言うのである．たとえば，ユニコーンが存在しないとするならば，そのことから，すべてのユニコーンは気も狂わんばかりに幸福である，ということが帰結し，その限りではまた，すべてのユニコーンは身も世もあられず悲しんでいる，ということも帰結する．このパラドックスはもちろん，普遍的命題の分析において，質料的含意‘$\rightarrow$’が用いられているという事実を反映しているだけのことである．すなわち，Fx がすべての x に対して偽であるならば，‘$\rightarrow$’に対するマトリックスにより，Gx の真理値が何であろうとも，$Fx\rightarrow Gx$ はすべての x に対して真である．

134の証明は幾らか吟味する価値がある．基本的にはRAAによる証明なので，(3)−(9)の行は(2)の帰結を導くことにささげられている．(3)において引用されている，以前にえられた結果 3.4.1(d) とは，

$$-(\exists x)Fx\vdash(x)-Fx$$

である．‘Fx’を‘$Fx\rightarrow Gx$’とおいた，これの単純な代入例は

$$-(\exists x)(Fx\rightarrow Gx)\vdash(x)-(Fx\rightarrow Gx)$$

であり，そしてこれが，SIと併用されて，(2)から(3)へ進むために用いられている．初等的な推論により，(3)からは(8)と(9)が帰結するが，(8)は(1)の前件で

あり，また(9)は(1)の後件と矛盾することが示される．というのは，113の結果を用いて，'G'を'F'に代入するだけで，(10)から(11)へ進むことができるからである．

以上，われわれは述語文字に対する代入のみを論じてきた．しかし時として変数を交換したり，任意の名前を交換したり，固有名を交換したりすることを許す原理を必要とすることもあるかも知れない．そのような原理は容易に述べられ，困難なく証明されうる．Aを変数vを含むwffとし，wをAのなかには現われないある変数としよう．A′を，Aのなかにおいてvが現われるすべての個所を，またそれらの個所のみを，wに置き換えることによってえられる結果としよう．その場合には，Aが定理であるならば，A′もまた定理である．（なぜwをAのなかに現われないものとすることが必要かは，形成規則から明白でなければならない．）この交換は連式一般に拡張することができる．同様に，Aをタームtを含むwffとし，sをAのなかには現われないあるタームとしよう．A′を，Aのなかにおいてtが現われるすべての個所を，またそれらの個所のみをsによって置き換えることによってえられる結果としよう．その場合には，Aが定理ならば，A′もまた定理である．ここでtとsがともに固有名であっても，ともに任意の名前であっても，あるいはひとつは固有名ひとつは任意の名前であっても，同じことである．その理由は明らかでなければならない――Aが定理ならば，tにどのような解釈を与えてもそれは成り立たねばならない．従って固有名と任意の名前との間の直観的差異はなくなる．また，結果は連式にも拡張される．これらの原理はどちらも，暗黙のうちにTIおよびSIと併用して用いられるであろう．たとえば，100の証明はまたつぎの連式の証明であると考えてよい．

$$Fa, (y)(Fy \rightarrow Gy) \vdash Ga.$$

ここでは'm'は'a'によって，'x'は'y'によって置き換えられている．

この節では，述語計算に対する無矛盾性と完全性の概念について素描する

仕事が，従って第2章において命題計算に対してなされたことを述語計算に対してする仕事が，残っている．命題計算において，連式表現の性質――トートロジー的であるという性質――が記述され，そしてすべての導出可能な連式が，また導出可能な連式のみが，この性質をもつことが示され，こうして無矛盾性と完全性が証明された．述語計算の場合には，真理表テストの単純な言語によって記述されうるような性質はすぐにはえられない．しかしより複雑ではあるが，それに類似した wffs の性質を取り上げて言うことはできる――すべての空ならざる世界におけるすべての解釈の下において真であるという性質，がそれである．

われわれは既に，話の世界の概念に訴えたことがある．世界とは，ごく簡単に言えば，ある対象の集合である．それは第3章において考察された3つの対象の世界のように，有限であってもよい．それは代数学において考察される自然数の世界がそうであるように，無限であってもよい．空ならざる世界とは，少なくとも1つの対象を含む世界である．述語計算は，どのような解釈をする場合にも，われわれが論じているのは空ならざる世界であるということを仮定するのである．たとえば，$(\exists x)(Fx \vee -Fx)$ は存在命題であるから，空なる世界においては真ではないであろうけれども，われわれはこれを定理としてもつことになる（131から104によって）．実際，空なる世界は大へん奇妙な形式的性質をもっているので，それを考えない方がよいのである．

与えられた空ならざる世界における wff の解釈とは，wff のなかのタームに対して，世界から選ばれた対象を対応させ，それと同時に，wff のなかの述語文字に対して，世界の対象に対して定義された性質および関係を対応させることである（述語文字が命題変数である場合には，命題計算におけると同様，たんに真理値をそれに対応させる）．たとえば，

(6)　$Fa \,\&\, (\exists x)Gax$

を自然数の世界において，‘a’に2を，‘F’に偶数であるという性質を，‘G’

により大であるという関係を対応させることによって，解釈してもよいであろう．この解釈のもとにおいては，(6)は，2は偶数でありそして2の方が大である自然数が存在するということを主張する．故に，(6)はこの解釈に対して明らかに真である．一般にわれわれは，与えられた世界における与えられた解釈に対して，wff の真理値をよく知られた方法で計算することができる．われわれは変数が世界の対象を変域とするものと考える．そうすると‘(x) $(\cdots\cdots x\cdots\cdots)$’は世界のすべての対象が‘$(\cdots\cdots x\cdots\cdots)$’という条件を満たす場合にのみ真となり，‘$(\exists x)(\cdots\cdots x\cdots\cdots)$’は世界の少なくとも1つの対象が‘$(\cdots\cdots x\cdots\cdots)$’という条件を満たす場合にのみ真となる．それからあとは，複合文の真理値を決定するためには，その構成要素の真理値が与えられたら，命題計算のマトリックスを用いるのである．これがあらましの説明に過ぎないことには議論の余地はない．しかし wff がある空ならざる話の世界においてある解釈のもとに真であるという観念に実体を与えるためには，既に十分なことが言われたのでなければならない．

そこで wff は，すべての空ならざる世界におけるすべての解釈のもとに真であるならば，論理的に真である，と言うことにしよう．これが，命題計算の wffs に対するトートロジー的であるという性質の，述語計算に対する，求められた拡張である．与えられた世界が有限ならば，われわれは wff のすべての可能な解釈を現実に枚挙することができる．なぜならば，対象，性質，関係の相異なる対応の個数はこの場合には有限だからである．故に有限の世界に対しては，真理表の手続に類似した，機械的なテストが，解釈のもとにおける真あるいは偽をテストするために利用できる．しかしそのような技術は，無限の世界に対しては利用できないことは明らかである．この点で，命題計算と述語計算は基本的には相異なるものなのである．

連式表現一般に対しては，つぎのように言うことが必要である．連式表現，

$$A_1, \cdots\cdots, A_n \vdash B$$

は，wffs $A_1, \cdots\cdots, A_n$, B の，任意の空ならざる世界における任意の解釈のも

とにおいて，$A_1,\cdots\cdots, A_n$ がすべて真であるときにはつねに B も真であるならば，論理的に妥当である．このことからつぎのことが帰結する．連式表現はそれに対応する条件法が論理的に真であるとき，またそのときに限って，論理的に妥当である．

すべての導出可能な連式が論理的に妥当であること，それ故に述語計算は無矛盾であること，を示すのは，大して難かしい問題ではない．以前と同様，この証明は，14個の規則のどれを適用しても，論理的に妥当な連式から論理的に妥当でない連式へと導かれることはないということを示すために，それらの規則をケース・バイ・ケースに考察することを含むのである．その逆を証明することは遙かに難かしい．述語計算に対する最初の完全性の証明は1930年にクルト・ゲーデル（Kurt Gödel）によって行なわれた．Hilbert and Ackermann〔7〕にこの証明についての説明がある．関心のある読者は，さらに Church〔2〕，§44 および §45 を調べていただきたい．証明の方法はここに定式化された述語計算に対してもたやすく拡張でき，そして任意の論理的に妥当な連式がわれわれの規則から導出可能であるという結果がえられる．この証明が，初等論理学と高等論理学の境界線とみなされてもよいであろう．

この節の大半は第2章の手続を手本にしたものであり，述語計算に関する結果の大半は命題計算に関する結果の拡張であったが，完全性の場合には重要な相違がある．第2章第5節における完全性の証明は，トートロジー的な連式が与えられるならば，われわれは現実に，その証明から問題になっている連式の導出を構成することができる，というものである．しかるにゲーデルの完全性の証明は，この構成的性格をもたないのである．実際第2章に指摘された通り，述語計算の連式表現を，論理的に妥当なものと論理的に不妥当なものとに分類する，真理表テストのような，機械的方法は存在しない．この結果はアロンゾ・チャーチ（Alonzo Church）によってえられたものであるが，その初等的な議論については，読者は Quine〔17〕，§32 を見ていただきたい．この結果が実際上意味するのはつぎのようなことである．ある連

式表現に直面して，それが健全であるか不健全であるかを知ろうとするとき，われわれは想像力を働かして証明を求めるであろう．また想像力を働かして，ある空ならざる世界において，すべての仮定を真にし結論を偽にするような解釈を求めるであろう．証明は，もし見出されるならば，機械的にチェックされることができる．不健全性を示す解釈は，もし見出されるならば，そういうものとして確認されることができる．しかし，反証のための解釈あるいは証明を求めることは，規則に還元されることはできない．

練 習 問 題

1　下に挙げる連式に対して，与えられた代入を行なえ．

(*a*)　101 において，'F' に '$Fx \vee Hx$' を，'G' に 'Hxa' を代入せよ．

(*b*)　103 において，'G' に '$(y)Gxy$' を代入せよ．

(*c*)　104 において，'F' に '$(\exists y)(Fxy \vee Gya)$' を代入せよ．

(*d*)　109 において，'F' に '$Fx \rightarrow Hx$'，'G' に '$Hx \rightarrow Fx$' を代入せよ．

(*e*)　116 において，'F' に '$(\exists z)(Fxz \ \& \ Gzx)$' を代入せよ．

(*f*)　119 において，'F' に '$(y)Gyx$' を，'P' に '$(z)Gza$' を代入せよ．

(*g*)　120 において，'F' に 'x' と 'y' に関する '$(z)Fxyz$' を代入せよ．

(*h*)　123 において，'F' に '$Fxa \vee (z)Kzx$'，'G' に '$(z)Fzx$'，'H' に 'x' と 'y' に関する '$(z)(Fxz \rightarrow Gzy)$' を代入せよ．

2　TI あるいは SI を適切な個所で用いて，つぎの連式の妥当性を示せ．

(*a*)　$(x)Fx \ \& \ (\exists x)Gx \vdash (\exists x)(Fx \ \& \ Gx)$

(*b*)　$(x)Fx \vee (\exists x)Gx \vdash (\exists x)(Fx \vee Gx)$

(*c*)　$(\exists x)Fx \rightarrow (x)Gx \vdash (x)(Fx \rightarrow Gx)$

(*d*)　$(x)(Fx \vee Gx) \vdash (x)Fx \vee (\exists x)Gx$

(*e*)　$(x)Fx \rightarrow (x)Gx \vdash (\exists x)(Fx \rightarrow Gx)$

(*f*)　$(\exists x)(Fx \rightarrow Gx) \dashv\vdash (x)Fx \rightarrow (\exists x)Gx$

3　つぎの定理を証明せよ．

(a)　$\vdash (y)((x)Fx \rightarrow Fy)$

(b)　$\vdash (y)(Fy \rightarrow (\exists x)Fx)$

(c)　$\vdash (\exists y)(Fy \rightarrow (x)Fx)$

(d)　$\vdash (\exists y)((\exists x)Fx \rightarrow Fy)$

4　（この書物のなかで恐らく最も難かしい問題）

(a)　113 の相互に導出可能な結果は，第1章において‘⟷’を‘→’と‘&’によって定義したのと大体同じような仕方で，存在量記号を普遍量記号と否定によって定義できるであろうことを示唆している．そこで，任意の変数 v に対して，

$$Df.\exists:\ (\exists \mathrm{v}) = -(\mathrm{v})-.$$ [3)]

この定義によって，たとえば‘$(\exists x)$’は，たんに‘$-(x)-$’の略記法に過ぎないものと理解される．この定義を採用することにし，従ってまた述語計算から規則 EI と EE を除去して，UI と UE のみを（もちろん命題計算の規則とともに）残すことにしよう．これを基礎として，規則 EI と EE が導出された規則としてえられることを示せ．（ヒント．（より簡単な）EI の場合には，$\mathrm{A(t)} \vdash -(\mathrm{v})-\mathrm{A(v)}$ が UI と UE のみを用いてつねに証明されうることを示せば十分である．ここで，A(t) と A(v) は第1節の終りに述べられているようなものであるとする．）

(b)　114 の相互に導出可能な結果は，同様に，存在量記号によって普遍量記号の定義ができることを示唆している．そこで，

$$Df.\mathrm{U}:\ (\mathrm{v}) = -(\exists \mathrm{v})-.$$

逆に，この定義を，規則 EI と EE，および命題計算の規則とともに採用するならば，規則 UI と UE が導出された規則としてえられることを示せ．

注1）しかしながら，述語計算のレベルにおいては，われわれはやはりつぎの制限

を守ることが必要になる．すなわち，代入される wff は，既にAのなかに現われる個体変数を含んでいてはならない．この制限がないならば，代入の結果は wff とはならない――たとえば，'$(x)(Fx \rightarrow P)$' における 'P' を '$(x)Gx$' によって置き換えるならば，導かれる式は wff ではない．

2）実際われわれは第3章において，ときどきそれらを用いることを認めたのであった．しかしそれはごく初等的な命題計算の連式との関連においてのみ認められたのである．

3）この手続は実際上，述語計算の多くの説明において採用されている．

第3節　同　一　性

この章の残りの部分は，述語計算の特殊な応用にあてられる．この節においては，論理学にとって特に重要なひとつの特定の関係，すなわち同一性の関係，が研究される．この関係は数学を学んで以来既に身近かなものであるが，数学においては同一性は，（誤解をまねきやすい呼び名ではあるが）等号 '=' によって示される．たとえば，'2+2=4' が言わんとするところは，2と2を加え合わすことから結果する数は4（と同じ，あるいは同一の数）である，ということである．非数学的な文脈では，同一性は「である」によって表現されるのが普通である．しかし，「ある」という動詞は多くの意味をもっている故，「である」が同一性を表現するのはどの意味においてであるかを，われわれはまず指摘しなくてはならない．

つぎの6つの日本語の文を考えてみよう．

(1)　ソクラテスは哲学者である．

(2)　パリは都市である．

(3)　勇気は徳である．

(4)　ソクラテスはプラトンを教えた哲学者である．

(5)　パリはフランスの首都である．

(6)　勇気はわたしが最も讃美する徳である．

(1)―(3)の文は単純な主語・述語の文である．特定の対象（ソクラテス，パリ，勇気）がある性質（哲学者であること，都市であること，徳であること）を

もつ，と言われるのである．従って，(1)—(3)における「である」のことを，述語の作用をする「である」('is' of predication）とよぶ．この「である」の用法は，(4)—(6)における「である」と比較対照される必要がある．ここではその意味はむしろ，「同じ対象である」(「対象」という語をある広い，中立的な意味に用いて）である．この「である」をわれわれは同一性の「である」('is' of identity）として区別する．

同一性の「である」を識別するための助けとなることがらはつぎの通りである．(*a*)「である」を「と同じ対象である」によって置き換えることができるか——もしできるならば，その「である」は同一性の「である」である．もしできなければ，そうではない．(*b*)「である」の両側にならぶ語句は，近似的に同じ意味をたもちつつ入れ換えることができるか——もしできるならば，その「である」は同一性の「である」である．もしできなければ，そうではない．これらの2つのテストを(1)—(6)に適用するならば，一方における(1)—(3)と，他方における(4)—(6)の区別が明らかになるであろう．事実，いつもきまったように同一性の「である」の両側にならぶ，あるタイプの表現がある．第1は，「ナポレオン」，「ウォータールー」のような固有名であり，第2は，文法家が時として（普通名詞に対立するものとして）抽象名詞とよぶことのある，複数形をもたない点で区別されるもの，たとえば，「勇気」，「パン」，「酸素」などであり，第3は，〔英語では〕'the' ではじまる単数の語句，たとえば，「宵の明星」(the evening star)，「ウェーヴァレーの著者」(the author of Waverley）など——このような語句はしばしば確定記述（definite descriptions）とよばれる——であり，第4は，「わたし」，「彼」，「その書物」，「この雲」，「昨夜」のような，いわゆる指示語または語句である．つぎには，そのような表現が両側にならんだ，同一性の「である」（あるいは，1つの例では「であった」）のなお幾つかの例を挙げよう．

(7)　最もあとに発見された元素はウラニウムである．

(8)　あの背の高い人は彼のいとこである．

(9)　昨夜は博覧会の第一夜であった.

(10)　キケロはトゥリウスである.

(11)　美は真理である.

哲学的立場からのよりくわしい同一性の議論は，この書物では取り扱われない．この書物では同一性の概念を形式的に取り扱うのが仕事である．このためにわれわれは数学から記号 ‘=’ を採用して，同一性の「である」を表わすことにし，またこれにともなって形成規則を拡張する．t および s を任意のタームとしよう．その場合には，(t=s) が今後，素文として考えられることになる．従って，‘$(a=b)$’，‘$(c=c)$’，‘$(m=n)$’，‘$(a=n)$’ はすべて，拡張された意味における素文である．見方によれば，‘=’ は2つのタームに作用を及ぼす新しい述語文字である．しかし，数学の慣習に従って，それを2つのタームの前に置くよりもむしろ，それらの間に置くという規約を採用するのである．また，他の述語文字とは異なって，それはきまった解釈をもっている．前のものを少し拡張しただけのこの新しい言語が，等号を含む述語計算 (predicate calculus with identity) である．他の形成規則から考えて，‘=’ は，ちょうど ‘F’，‘G’，……… が現われるのと同じような仕方で，複合的表現のなかに現われる．たとえば，‘$(x)(x=x)$’，‘$(x)(y)((Fx\ \&\ (x=y))\rightarrow Fy)$’ は拡張された言語の wffs である．

証明において同一性を取り扱うために，われわれは2つの単純な規則，等号の導入の規則 (Rule of identity introduction)〔=I〕と等号の除去の規則 (Rule of identity elimination)〔=E〕を導入する．任意のターム t に対して，規則 =I は，証明の任意の段階において，t=t をいかなる仮定にも依存することなく導入することを許す．この考えは明瞭なのでなければならない．論理の問題として，すべてのものはそれ自身と同一である．故に t=t は論理的に真であり，従って仮定なしに現われることができる．さて t と s をタームとし，A(t) を t（の現われる個所）を含む wff としよう．また A(s) を，A(t) において，t の現われる少なくとも1つの個所を（しかし必ずし

もすべての個所でなくてもよい）sによって置き換えてえられる結果としよう．その場合には，t=s および A(t) が前提として与えられるならば，規則=E は A(s) を結論として，前提が依存する仮定のプールされたものに基づいて，導くことを許す．この場合にもまた，この考えは簡単なものである．t が s であり，A(t)——t についての命題——が与えられるならば，A(s)——それに対応する s についての命題——を推論することができる．たとえば，美が真理であり，また美は見る人の見方次第であるならば，真理は見る人の見方次第である（キーツが間違っていたことを示そうともくろまれた論証）．

これらの規則を活用して，つぎの結果がえられる．

135 $a=b \vdash b=a$

1	(1)	$a=b$	A
	(2)	$a=a$	=I
1	(3)	$b=a$	1, 2 =E

136 $a=b \ \& \ b=c \vdash a=c$

1	(1)	$a=b \ \& \ b=c$	A
1	(2)	$a=b$	1 &E
1	(3)	$b=c$	1 &E
1	(4)	$a=c$	2, 3 =E

137 $Fa \dashv\vdash (\exists x)(x=a \ \& \ Fx)$

(a) $Fa \vdash (\exists x)(x=a \ \& \ Fx)$

1	(1)	Fa	A
	(2)	$a=a$	=I
1	(3)	$a=a \ \& \ Fa$	1, 2 &I
1	(4)	$(\exists x)(x=a \ \& \ Fx)$	3 EI

(b) $(\exists x)(x=a \ \& \ Fx) \vdash Fa$

1	(1)	$(\exists x)(x=a \ \& \ Fx)$	A

2	(2)	$b=a$ & Fb	A
2	(3)	$b=a$	2 &E
2	(4)	Fb	2 &E
2	(5)	Fa	3, 4 =E
1	(6)	Fa	1, 2, 5 EE

135 の証明には当惑するかも知れないが，(1) '$a=b$' を前提 t=s と考え，そして (2) '$a=a$' を A(t) と考えるならば，(3) '$b=a$' は適切な A(s) である．なぜならば，(1)の同一性に応じて，(2)において第 1 に現われる 'a' を 'b' に置き換えることによって，それは (2)からえられるからである．136 における =E の適用も同様である．137 によれば，任意に選ばれた対象 a が F をもつという命題は，a であってそして F をもつものが存在するという命題と，相互に導出可能である．

同一性に関する定理として，つぎのものがえられる．

138　$\vdash (x)(x=x)$

(1)	$a=a$	=I
(2)	$(x)(x=x)$	I UI

139　$\vdash (x)(y)(x=y \rightarrow y=x)$

140　$\vdash (x)(y)(z)(x=y \;\&\; y=z \rightarrow x=z)$

最後の 2 つの定理は，135 と 136 の証明を，CP の適用と，そのあとにつづく UI の適用によって補うことによってえられる．

=E の適用に対して，タームが誤まった順序で（t=s よりはむしろ s=t で）与えられたならば，われわれは SI によって，（必要ならば用いる文字を変えたあとで）135 を用いて t=s をうることができるということは，注意しておいてよい．

さてつぎの論証を考えてみよう（これは Quine〔17〕からの翻案である）．

(12)　スミスとその門衛のみが合言葉を知っていた．合言葉を
　　知っていたある者が銃を盗んだ．故にスミスかあるいは

その門衛が銃を盗んだ.

これは明らかに健全である．しかしその健全性を，等号を含まない述語計算のなかで示すことはできないのである．「のみ」(only) という語の通常の意味を念頭におくならば，⑿の第１の前提はつぎのことを意味する．

⒀ 合言葉を知っていたすべての人は，スミスであったかあるいはその門衛であった.

⒀において，２つの「であった」は同一性の「であった」である．従って，'K' が合言葉を知っていたことを，'m' がスミス，'n' がその門衛，を表わすものとするならば，⒀はつぎのように記号化される．

⒁ $(x)(Kx \rightarrow x=m \vee x=n)$.

'S' を，銃を盗んだことを表わすものとして用いるならば，われわれが証明しなくてはならないのはつぎの連式である。

141 $(x)(Kx\rightarrow x=m \vee x=n)$, $(\exists x)(Kx \,\&\, Sx) \vdash Sm \vee Sn$

1	(1) $(x)(Kx \rightarrow x=m \vee x=n)$	A
2	(2) $(\exists x)(Kx \,\&\, Sx)$	A
3	(3) $Ka \,\&\, Sa$	A
3	(4) Ka	3 &E
3	(5) Sa	3 &E
1	(6) $Ka \rightarrow a=m \vee a=n$	1 UE
1, 3	(7) $a=m \vee a=n$	4, 6 MPP
8	(8) $a=m$	A
3, 8	(9) Sm	5, 8 =E
3, 8	(10) $Sm \vee Sn$	9 vI
11	(11) $a=n$	A
3, 11	(12) Sn	5, 11 =E
3, 11	(13) $Sm \vee Sn$	12 vI
1, 3	(14) $Sm \vee Sn$	7, 8, 10, 11, 13 vE

1, 2　(15) $Sm \vee Sn$　　2, 3, 14 EE

(2)の行に対応して，(3)の行において代表的選言項を仮定したのち，(7)すなわち，aはmであるかあるいはaはnである，がえられる．いずれを仮定しても，そこからは，mが銃を盗んだかあるいはnが銃を盗んだ，が帰結する．故に，vE と EE によって（(14)と(15)の行）求める結論がえられる．

この論証は，等号をわれわれの論理記号のリストに加えることによってえられた，増加した表現力を示す例になる．いまひとつの例として，まずつぎの導出可能な連式を考えてみよう．

142　$(\exists x)Fx \vdash (\exists x)(\exists y)(Fx \,\&\, Fy)$

1	(1)	$(\exists x)Fx$	A
2	(2)	Fa	A
2	(3)	$Fa \,\&\, Fa$	2, 2 &I
2	(4)	$(\exists y)(Fa \,\&\, Fy)$	3 EI
2	(5)	$(\exists x)(\exists y)(Fx \,\&\, Fy)$	4 EI
1	(6)	$(\exists x)(\exists y)(Fx \,\&\, Fy)$	1, 2, 5 EE

（この結果は事実上，強化して相互導出可能にすることができる．）この連式の妥当性から，ひとつだけの対象がFをもっているならば，$(\exists x)(\exists y)(Fx \,\&\, Fy)$ということが帰結する．言い換えると，相異なった変数‘x’と‘y’を用いる場合に，そのことから，それに対応する相異なった対象が存在する，ということは帰結しないのである．性質Fをもつ少なくとも2つの相異なった対象が存在する，ということを表現するためには，われわれは等号を必要とする．すなわち，

$$(\exists x)(\exists y)((Fx \,\&\, Fy) \,\&\, -(x=y))$$

——どちらもFをもつ同一でないxとyが存在する.[1)]

同様に，Fをもつ少なくとも3つのものが存在する，と言うためには，つぎのように書くことができる．

$$(\exists x)(\exists y)(\exists z)(Fx \,\&\, Fy \,\&\, Fz \,\&\, -(x=y) \,\&\, -(x=z) \,\&\, -(y=z)).$$

(表現をはっきりさせるために，複合された連言の内側の括弧をここでは無頓着に無視した.) 一般に，任意の数 n に対して，F をもつ少なくとも n 個のものが存在するということを，等号を分析に不可欠のものとして用いることによって，どのようなかたちで言うことができるかは，明らかなのでなければならない.

「Fをもつ少なくとも n 個のものが存在する」を記号化することができるならば，恐らくまた「Fをもつ正確に n 個のものが存在する」も記号化することができるのではないであろうか. まず「Fをもつ正確に１つのものが存在する」あるいは「Fをもつ１つのそしてただ１つのものが存在する」あるいは「Fをもつ少なくとも１つのそして多くとも１つのものが存在する」からはじめよう.「Fをもつ少なくとも１つのものが存在する」と言うことは，たんに $(\exists x)Fx$ と言うことに過ぎない. 従って問題は「F をもつ多くとも１つのものが存在する」をどのように記号化するかにかかっている.

多くとも１つのものが F をもつ，と主張することは，(慣用的な，しかし誤解をまねきやすい日本語で) Fをもつ任意の２つのものが同じものであると主張することである. われわれの記号では，それはつぎのように書かれる.

(15) $(x)(y)(Fx \ \& \ Fy \rightarrow x=y)$

——対象 x および y をとるとする. するとそれらのいずれもがFをもつならば，それらは同一である. この式は，Fをもつものが存在しないことも，またFをもつ１つのものが存在することも許す. しかし１つより多いものが存在するならば，それは明らかに偽となる. 故に(15)は，多くとも１つのものがFをもつということを主張するのである.

それ故，正確に１つのものがFをもつと言うことは，つぎのように言うことである.

(16) $(\exists x)Fx \ \& \ (x)(y)(Fx \ \& \ Fy \rightarrow x=y)$.

さて(16)は，実はより短かくすっきりとしたつぎの式と相互に導出可能なのである.

(17)　$(\exists x)(Fx \ \& \ (y)(Fy \rightarrow x=y))$.

(17)は，あるものがFをもち，そして任意のFをもつものはまさにそのものにほかならない，ということを主張する．正確に1つのものがFをもつということの，いまひとつの言い方である．しかるに，まだもっと明瞭であるかも知れない，第3の同値な式がある．すなわち，

(18)　$(\exists x)(Fx \ \& \ -(\exists y)(Fy \ \& \ -(x=y)))$

——Fをもつものが存在し，そして他のいかなるものもFをもつことはない．

'$(\exists_1 x)Fx$' という記法を，たとえば(17)((16)あるいは(18)でもよいであろうが)に対する略記法として用いることにしよう．この新しい記号は，決まった個数を表わす量記号 (numerically definite quantifier) とよばれるであろう．そして「Fをもつ正確に1つのxが存在する」，あるいは「Fをもつただ1つのxが存在する」と読まれる．

ところで，Fをもつ正確に2つのものが存在すると言いたいならば，幾つかの道が開かれている．恐らく最も簡単なのはつぎのように書くことであろう．

(19)　$(\exists x)(\exists y)(Fx \ \& \ Fy \ \& \ -(x=y) \ \& \ (z)(Fz \rightarrow z=x \vee z=y))$

——いずれもFをもつ相異なった対象xおよびyが存在し，Fをもつものはすべて一方すなわちxであるか，あるいは他方すなわちyであるかである．いまひとつの書き方として，既に導入された記号 '$(\exists_1 x)$' を用いて，つぎのように書いてもよい．

(20)　$(\exists x)(Fx \ \& \ (\exists_1 y)(Fy \ \& \ -(x=y)))$

——Fをもつものが存在し，Fをもつ正確に1つの，それとは同じでないものが存在する．これは明らかに，正確に2つのものがFをもつという主張と同値である．われわれは(20)を，第2の決まった個数を表わす量記号を用いて，'$(\exists_2 x)Fx$' と略記したいと思うでもあろう．

この手続は，任意の有限な数に拡張されうる．すなわち，任意の数nに対して，正確にn個のものがFをもつと主張する，等号を含む述語計算の表現

を見出すことができる．しかしながら，ここではこのことの展開を追うことをせず，そのかわりに最後に，論証のなかにおいて確定記述（'the' によってはじまる単数の語句）をどのように取扱うかの議論に戻るであろう．

この節の論証(12)において，確定記述「その門衛」(the guard at the gate) が現われた．われわれの記号化においては，それは正確に「スミス」のような固有名であるかのように扱われ，そして 'n' が用いられた．この場合には，この方法で論証の妥当性を示すことができた．しかしつねにそうできるとは限らないのである．たとえば，つぎの論証（これもまた本質的には Quine〔17〕による）を考えてみよう．

(21)　イリアスの著者はオデュッセイアを書いた．故にある人はイリアスとオデュッセイアの両方を書いた．

「イリアスの著者」を固有名として扱い，それを，たとえば，'m' によって表わすならば，論証の健全性がでてくることはない．前提は 'Om' となり，結論は '$(\exists x)(Ix \;\&\; Ox)$' となり，そしてそれに対応する連式は導出可能ではない．明らかに，論証の健全性はここでは，確定記述のなかに含まれている性質，すなわちイリアスを書くという性質，に依存し，そしてこの性質が，論証の妥当性を示そうと欲するならば，われわれの前提の分析のなかにでてこなければならないであろう．(21)における確定記述の内容についての反省から，前提は，正確に1人の人がイリアスを書いたこと，そしてその人がオデュッセイアを書いたこと，を主張するものと解釈しうる，ということがわかる．従って前提はつぎのようになる．

(22)　$(\exists x)((Ix \;\&\; Ox) \;\&\; (y)(Iy \rightarrow x=y))$

――ある人はイリアスを書いた，そしてオデュッセイアを書いた，そしてさらにその人はイリアスを書いたただ1人の人である．最後の節は，上の(17)の様式で，その人の一意性を表現し，従って確定記述の意味をとらえている．しかし(22)からは，結論 $(\exists x)(Ix \;\&\; Ox)$ が SI によって，111を用いて，直ちに帰結する．

(22)における確定記述の取り扱いは，論理分析においては無視できぬ重要さをもつ．それはラッセルに由来するものなので，ラッセルの確定記述の理論として知られるに到っている．それは哲学的な問題を提起するのであるが，しかしながら，その問題はこの書物では取り扱うことはできない．ここではつぎのことに注意すべきである．すなわち，(12)と(21)を比較するならばわかることであるが，ラッセルの分析にぜひ従わねばならないというものではない．妥当性のテストにおいて，確定記述を通常の固有名と全く同等に考えれば十分なことはしばしばある．大ざっぱに言うと，確定記述をどのように扱うかは，命題の内部構造を，それらの命題が現われる論証の妥当性を証明するために，どの程度まではっきりさせる必要があるかという事情に依存しているのである．そしてこのことが今度は，命題の論理形式についてあることを教えるのである．われわれが日常言語の文を論理的記法へ分析するのに，最終的なあるいは絶対的なかたちは存在しない．論証の妥当性を明らかにする目的に従って，同じ文が，ひとつの推論の文脈ではたんに‘P’によって表現され（妥当性が命題計算の構造にのみ依存するのであるならば），また他の推論の文脈では複雑な述語計算の wff によって表現されることもある．そして同様に，文の内部の確定記述は，ある文脈では単に‘m’によって表現され，また他の文脈ではよりくわしく，ラッセルの記述理論によって分析される必要があるのである．われわれは恐らくこの論点をつぎのように言い表わすことができるであろう．すなわち，文の論理形式はつねに，与えられた論証の行なわれる状況に相対的なものである．あるいは，文の論理形式については全く語ることをしないで，ただ文がそのなかで用いられる論証の論理形式についてのみ語ることにする方がよいのであろう．

練 習 問 題

1　つぎの連式の妥当性を証明せよ．

(a)　$Fa \dashv\vdash (x)(x=a \rightarrow Fx)$

(*b*) $\vdash (x)(y)(Fx \mathbin{\&} x=y \rightarrow Fy)$

(*c*) $b=a,\ c=a \vdash b=c$

(*d*) $a=b \vdash Fa \longleftrightarrow Fb$

(*e*) $a=b \vdash c=a \longleftrightarrow c=b$

(*f*) $\vdash (\exists x)(x=a)$

2 つぎの論証を等号を含む述語計算の記号に翻訳し，そしてそれに対応する連式の妥当性を示すことによって，論証の健全性を証明せよ.

(*a*) すべての殺人者は精神異常である. ジーキルは殺人者である. ジーキルはハイドである. 故にハイドは精神異常である.

(*b*) いかなる殺人者も精神が正常でない. ジーキルは殺人者である. ハイドは精神が正常である. 故にジーキルはハイドではない.

(*c*) トムとジェーンのみがダンスをしている. トムとジェーンはどちらもツイストをしている. 故にすべてのダンスをしている者はツイストをしている.

(*d*) 多くとも1人の無法な国家首席がいる. 毛沢東は無法な国家首席である. ジョンソンは毛沢東ではない. 故にジョンソンは無法な国家首席ではない.

3 つぎの相互に導出可能な結果を確立せよ（本文の(16)および(17)を参照).

(*a*) $(\exists x)(Fx \mathbin{\&} (y)(Fy \rightarrow x=y)) \dashv\vdash (\exists x)Fx \mathbin{\&} (x)(y)(Fx \mathbin{\&} Fy \rightarrow x=y)$

（ヒント：練習問題1の(*c*)を用いて SI を適用すれば，労が省かれるであろう）

4 つぎの意味をもった，等号を含む述語計算の表現を書け.

(*a*) Fをもつ多くとも2つのものが存在する.

(*b*) Fをもつ正確に3つのものが存在する.

5 ラッセルの確定記述の理論を用いて，つぎの論証の健全性を確立せよ.

(*a*) マイン・カンプの著者は1945年に死んだ. ヒトラーはマイン・カンプを書いた. 故にヒトラーは1945年に死んだ.

注1）われわれの変数の用法が正しく理解されるべきであるとするならば，この点は重要である．ある人が彼自身を殺したならば，ある人がある人を殺したのである．これは，われわれにとっては，$(\exists x)Kxx \rightarrow (\exists x)(\exists y)Kxy$ という定理となる．ある人が彼自身以外のある人を殺した，と言いたいのであれば，'$(\exists x)(\exists y)(Kxy \,\&\, -(x=y))$' と書く必要がある．そしてこれは $(\exists x)Kxx$ からは帰結しないであろう．

第4節　三段論法

述語計算はいまから100年前には発見されていなかった．それは今世紀初頭の頃に活躍した論理学者たち，とりわけゴットローブ・フレーゲ (Gottlob Frege) とラッセルのおかげで発展したのである．それ以前の2,000年以上というもの，同じ論理学の材料のあるものが三段論法の理論によって取り扱われたのであるが，これをわれわれはアリストテレスに負うている．その期間にあっては，実質的には何らそれに加えられるものはなかったのであった．まじめな論理学の仕事のための道具として，述語計算が三段論法に取ってかわったということには，今日疑いの余地があるわけはない．述語計算の三段論法に対するは，精密な工具の切れ味のわるいナイフに対するがごとし，といったところである．(それにもかかわらず，新しい装置が導入されるときにはいつも，馴れ親しんでいる時代おくれの機械類の方がよろしいと言うひとびとが必ずいるものである．そして述語計算の方が習い覚えるのに骨が折れるということは確かにその通りである．) 三段論法を研究するのは，歴史的な理由以外の理由があるわけではない．しかしこの理論は，論理学と哲学のいずれの歴史においても重要であった．そしてそれ故に，近代論理学のコースのなかに場所を与えられるのに恐らくは値するであろう．材料は他のひとびとの著作に見出されるであろうから (たとえば，Joseph〔8〕あるいは Stebbing〔22〕)，われわれの論述は足取り早く進むであろう．しかしわたしは，三段論法と述語計算の間の関係を明らかにすることをも試みるであろう．という

のは，これについて議論があるからである（Strawson〔23〕を見よ）．

三段論法の理論は，ただ4つのタイプの命題のみを研究する．これらをわれわれは第3章第1節において区別した．すなわち，(i) F をもつすべてのものは G をもつ，$(x)(Fx \rightarrow Gx)$．これを全称肯定（universal affirmative）とよび，A(F,G) と記号化する．(ii) F をもついかなるものも G をもたない，$(x)(Fx \rightarrow -Gx)$．これを全称否定（universal negative）とよび，E(F,G) と記号化する．(iii) F をもつ幾らかのものは G をもつ，$(\exists x)(Fx \,\&\, Gx)$，これを特称肯定（particular affirmative）とよび，I(F,G) と記号化する．(iv) F をもつ幾らかのものは G をもたない，$(\exists x)(Fx \,\&\, -Gx)$．これを特称否定（particular negative）とよび，O(F,G) と記号化する．三段論法においては，述語計算とは反対に，これらの命題の構造をもうこれ以上は分析しない．われわれは命題に含まれている2つの性質を分けるにとどめ，その他の部分を，'A'，'E'，'I'，'O' という記号のひとつによって記録する．われわれの立場からはあいにくなことではあるが，'F'，'G'，……… の文字を名辞（terms）とよぶならわしになっている．この節ではわたしはこの慣行に従い，それから生ずる多義性から大きな損傷を受けなくてすむようにと望むものである．

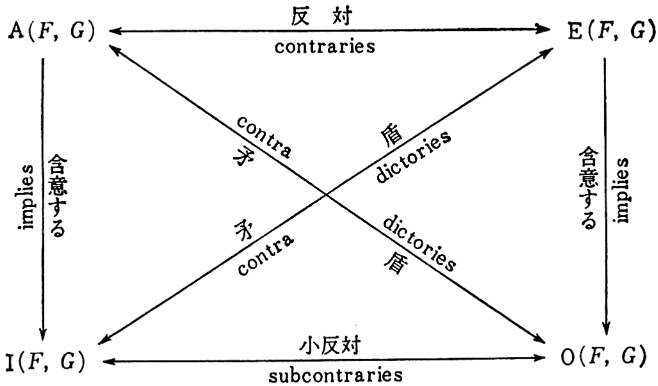
4つの形式の間の基本的な論理的関係は，伝統的に対当の正方形（square of opposition）とよばれる図（218頁を見よ）によって説明される．対当の正方形において用いられる術語の意味は，第2章第3節において，少なくとも命題計算のレベルにおいては，与えられている．そこでの議論に照らして，われわれは図においてなされている主張を6つの原理に表わすことができるであろう．すなわち，

(1) $-(\mathrm{A}(F,G) \longleftrightarrow \mathrm{O}(F,G))$ （AとOは矛盾である）

(2) $-(\mathrm{I}(F,G) \longleftrightarrow \mathrm{E}(F,G))$ （IとEは矛盾である）

(3) $-(\mathrm{A}(F,G) \,\&\, \mathrm{E}(F,G))$ （AとEは反対である）

(4) $\mathrm{I}(F,G) \vee \mathrm{O}(F,G)$ （IとOは小反対である）



対当の正方形

(5)　$A(F,G) \to I(F,G)$　　　（AはIを含意する）

(6)　$E(F,G) \to O(F,G)$　　　（EはOを含意する）

これらの原理は相互に独立なのではない．たとえば，(1)と(2)が与えられるならば，命題計算の推論のみによって，(4)を(3)から，あるいは(3)を(4)から，また(5)を(6)から，あるいは(6)を(5)から，演繹することができる——これは恰好の練習問題として残しておこう．

こうして伝統的な見解では，AとOはいかなる場合にも，相反する真理値をもたねばならず，またIとEもそうでなければならない（(1)と(2)）．AとEは，ともに真であることはできないが，ともに偽であってもよい——実際IとOがともに真である場合にはともに偽であろう．逆に，IとOはともに真であってもよく，実際AとEがともに偽である場合にはそうであろうが，しかしともに偽であることはできない（(3)と(4)）．Aが真であるときには，つねにIも真であり，Eが真であるときには，つねにOも真である（(5)と(6)）．簡単な例を考えてみるならば，この理論は支持されるであろう．

対当の正方形においては，名辞 'F' および 'G' が与えられる順序は，すべての場合について固定していると考えられる．しかしながら，名辞の順序の交換に関わる，換位の法則 (laws of conversion) として知られる，伝統的

原理がある．実際つぎのものがそれである．

(7) $\mathrm{I}(F,G)\rightarrow\mathrm{I}(G,F)$

(8) $\mathrm{E}(F,G)\rightarrow\mathrm{E}(G,F)$.

(7)および(8)の逆は，(7)および(8)から，‘F’と‘G’を交換することによって帰結する．その結果，2つの条件法は同時に強化されて相互条件法となる．(7)はＩの単純換位 (simple conversion) の法則として知られ，また(8)はＥの単純換位の法則として知られている．換位が単純だと言われるのは，Ｉ-形式がＩ-形式に，Ｅ-形式がＥ-形式にかわるという意味においてである．ＡおよびＯの形式に対しては，そのような原理は存在しない．なぜならば，明らかに $\mathrm{A}(F,G)\rightarrow\mathrm{A}(G,F)$ も $\mathrm{O}(F,G)\rightarrow\mathrm{O}(G,F)$ も成り立たないからである．しかしながら，Ａに対しては

(9) $\mathrm{A}(F,G)\rightarrow\mathrm{I}(G,F)$

がえられる．((9)は，命題計算の推論による(5)と(7)の帰結である．) (9)は，Ａ-形式がＩ-形式に減量換位されるという言い方で言い表わされることがあり，Ａの減量換位 (conversion per accidens) の法則とよばれることがある．(9)の逆は成り立たない．またＯ-形式に対しては，そのような原理は全く存在しない．故に，Ｉ，Ｅ，およびＡはすべて，換位されると言われるが，Ｏは換位されないと言われる．

換質 (obversion) の原理のような，他の伝統的法則は，否定的名辞，‘$-F$’，‘$-G$’などを導入することによって定式化される．そのような名辞は，アリストテレス的三段論法の理論のためには必要とされないから，われわれはそれらをここでは無視するであろう．関心のあるむきは Joseph〔8〕あるいは Stebbing〔22〕について調べていただきたい．

これまでに述べた原理とは違って，三段論法は3つの名辞，たとえば‘F’，‘G’，および‘H’に関わる．三段論法を正確に定義するために，3つの名辞 P_1, P_2, および P_3 を与えられたものとして，P_1 を小名辞 (minor term)，P_2 を中名辞 (middle term)，P_3 を大名辞 (major term) とよぶことにしよう．

その場合には，三段論法とは，それぞれが A-，E-，I-，あるいは O-形式のいずれかである3つの命題（最初の2つが前提，最後のものが結論とよばれる）の系列であって，結論には小名辞と大名辞がこの順序で含まれ，また第1の前提には大名辞と中名辞が，第2の前提には小名辞と中名辞が含まれているようなものである．第1の前提は，大名辞を含んでいるから，大前提 (major premiss) とよばれ，第2の前提は小名辞を含んでいるから，小前提 (minor premiss) とよばれる．中名辞は2つの前提のいずれにも現われるが，結論には現われない．たとえば，

$$\text{(10)}\quad \begin{array}{c} \mathrm{A}(F,H) \\ \mathrm{I}(H,G) \\ \hline \mathrm{O}(G,F) \end{array}$$

は三段論法と認められてよい．なぜならば，それは3つの名辞，‘F’，‘G’，‘H’ に関わるからであるが，これらの名辞について言えば，結論に現われる2つの名辞のうち，第1のものは第2の前提にのみ，第2のものは第1の前提にのみ（特に，‘F’ は第1の前提に現われるから大名辞として，‘G’ は第2の前提に現われるから小名辞として認められる）現われるのに対し，第3の名辞は2つの前提のいずれにも現われるが結論には現われない（故に ‘H’ はここでは中名辞である）．こうして，P_1 を ‘G’，P_2 を ‘H’，P_3 を ‘F’ と考えることができ，定義は満たされる．この例はついでながら，三段論法を書き表わすための規約を決定する．

さてつぎのものを考えよう．

$$\text{(11)}\quad \begin{array}{c} \mathrm{A}(H,F) \\ \mathrm{I}(F,G) \\ \hline \mathrm{O}(G,H). \end{array}$$

これも，‘F’ が中名辞，‘G’ が小名辞，‘H’ が大名辞である三段論法として認められうる．実際にはこれは(10)から，‘F’ と ‘H’ を交換するだけでえられるという点において，(10)と密接な関係がある．(11)を(10)と同じ三段論法とみ

なしうるものかどうかについては，伝統的な三段論法の説明には，はっきりしないところがある．ここでは，われわれは，両者は異なった三段論法ではあるが，同じパターンを示すものであるとみなす．

無限に多くの名辞があるのだから，無限に多くの異なった三段論法がある．しかし，有限に多くの異なった三段論法のパターンがあるのみなのである．このことを知るために，結論の文字については，'F' と 'H' がこの順序に出てくるものとして固定し，また 'G' を第3の名辞として用いることに決めよう．すなわち，'F' は小名辞，'G' は中名辞，'H' は大名辞である．結論における名辞の順序は定義によって決まっているから，2つの前提における2つの名辞の可能な順列は，つぎの図表の示す通り，4つしかない．

	I	II	III	IV
大前提：	..(G,H)	..(H,G)	..(G,H)	..(H,G)
小前提：	..(F,G)	..(F,G)	..(G,F)	..(G,F)
結　論：	..(F,H)	..(F,H)	..(F,H)	..(F,H)

これらの4つの配列が，三段論法の4つの格 (figures) である．第I格においては，4つの可能な大前提（A，E，I，あるいはO），4つの可能な小前提，そして4つの可能な結論がある．故に $4\times4\times4=64$ の可能な三段論法がある．同じ計算は残りの3つの格に対しても成り立つので，その結果，固定した文字 'F', 'G', 'H' に対して全部で $4\times64=256$ の可能な三段論法があることになる．任意の三段論法はこれらの256の三段論法から文字を書き換えることによってえられる．たとえば，(10)と(11)はいずれも，第IV格の三段論法の文字を書き換えたものにほかならない（このことは中名辞の配置をしらべてみると最も容易にわかる）．従って正確に256個の相異なる三段論法のパターンが存在する．'F', 'G', 'H' を上の仕方で固定することによってえられる256個の現実の三段論法を，われわれはそれらのパターンの標準的な例 (standard instances) とよぶ．

結論における名辞の順序が定義によって固定されねばならないということ

は，この計算にとって本質的なことであるのは言うまでもない．たとえば，

(12)　A(F, H)
　　　I(H, G)
　　　─────
　　　O(F, G)

は(10)から，結論における'F'と'G'の順序を変えてえられるものであるが，三段論法ではない．なぜならば，結論における第2の名辞'G'は第1の前提のなかには現われないからである．しかしながら，前提の順序をも同時に変えるならば，これによってつぎのものがえられる

(13)　I(H, G)
　　　A(F, H)
　　　─────
　　　O(F, G).

この結果は三段論法である（'H'はやはり中名辞，'F'は今度は小名辞，そして'G'が大名辞）．しかし，(10)が第IV格のパターンであったのに対して，(13)は第I格のパターンである．こうして，格の数は3つであるのか4つであるのかという，その痕跡は伝統的論理学のごく最近の書物にも見られる，古くからの論争は，何を三段論法とよぶかという定義が不確実なことから生じたものと見ることができる．

伝統的論理学の背負いこんだ仕事のおもなものは，256の可能なパターンのうちから，どれが妥当であるか，またどれが不妥当であるかを区別することである．2つの全く別個のアプローチが用いられているが，それらは同じ結果になる．第1の方法は，それぞれのパターンがチェックされうるような，非常に一般的な原理を定めることである．そのような原理のひとつは，いかなる結論も2つの（全称または特称）否定的な前提からは帰結しない，ということである．この原理のみで，それぞれの格において16，すなわち全部で64のパターンを不妥当としてしまう．これらの原理をここに述べることはしないが，この節の終りの練習問題にそれらを見られるであろう．第2の方法は，アリストテレス自身の方法であるが，第I格におけるある「自明な」パ

ターンを妥当なものとして受けいれ，それから，(1)—(9)のような原理を用いて，その他の格の妥当なパターンを演繹することである．この方法は，第I格への還元として，伝統的に知られている．そして，直接的還元と間接的還元という2つの形式をとる，と言われる．大ざっぱに言うと，間接的還元においては，妥当なパターンがRAAによって演繹される——パターンが成立しないという仮定から矛盾が導出される——が，これに対して直接的還元においては，このようなことはない．還元は，結論を与えられた前提から体系的に導出しようとする，知られている恐らく最初の試みなのであって，大きな歴史的興味がある．アリストテレスの説明は，近代的な厳密性の基準から言うと，粗雑で非形式的ではあるが，彼のプログラムのあらましに従い，非常に少数の三段論法的仮定の組から，純粋に命題計算の推論によって，妥当な三段論法を結論として導出することが可能である．伝統的論理学一般にあてはまる，そのような取り扱いのよい説明は Lukasiewicz〔12〕に見られるであろう．

実際，それぞれの格に6つずつ，計24の妥当な三段論法のパターンがあるのみであるということがわかる．しかしわたしは，これらを表にする前に，三段論法の理論を述語計算に関係づけることにしたい．

まず第1に生じる当然の疑問は，(1)—(9)の原理を，4つの伝統的形式が導入されたこの節の初めにおいて示された翻訳法を用いて，述語計算の記法に翻訳するならば，その結果は述語計算の定理であろうか，そうではないのだろうか，ということである．答えは，ある場合にはそうであり，ある場合にはそうではない，ということになる．なぜある場合はそうではないのかを知るために，(4)からはじめるのが最もよいであろう．(4)はつぎのように翻訳される．

(14) $(\exists x)(Fx \,\&\, Gx) \vee (\exists x)(Fx \,\&\, -Gx)$.

これは述語計算の定理ではない．またそのようなことは望ましくないであろう．なぜならば，つぎの結果が容易に証明されるからである．

143 $(\exists x)(Fx \,\&\, Gx) \vee (\exists x)(Fx \,\&\, -Gx) \dashv\vdash (\exists x)Fx$.

これは，(14)が，あるものがFをもつというただそれだけの主張と相互に導出可能であることを示す.[1)] 故に，(14)が定理ならば，任意の性質Fに対して，あるものがFをもつということが定理になるであろう．これは明らかに不合理である．(4)を論理学の原理として受けいれることによって，伝統的理論は，Fをもつものが存在しないかも知れないという可能性を見逃していることになる．故に，$\mathrm{I}(F,G)$ と $\mathrm{O}(F,G)$ は厳密には，伝統的論理学が主張するように小反対ではない．なぜならば，Fをもつものが存在しない場合には，それらはいずれも偽であろうからである．（あるユニコーンは太っているということはなく，またあるユニコーンは太っていないということもない，ということは真である．）

F をもつものが存在しないならば（すなわち，$-(\exists x)Fx$ ならば），名辞 'F' を空 (empty) であるとよぶことにしよう．伝統的論理学は，いかなる名辞も空ではない，ということを仮定しているのである．従って一般に，述語計算においては，ある存在仮定に基づいて，はじめて三段論法の理論における結果をうることができるのである．こうして 143 が明らかにしているように，$(\exists x)Fx$ という仮定に基づいて(14)の形式の(4)をうることができる．(1)および(2)に対応して，つぎの結果を証明することができる．

144　$\vdash -((x)(Fx \to Gx) \longleftrightarrow (\exists x)(Fx \mathbin{\&} -Gx))$

145　$\vdash -((x)(Fx \to -Gx) \longleftrightarrow (\exists x)(Fx \mathbin{\&} Gx))$

——ここでは存在仮定は必要ではない．しかしながら，(3)に対しては，えられうる最も強い結果はつぎのものである．

146　$(\exists x)Fx \vdash -((x)(Fx \to Gx) \mathbin{\&} (x)(Fx \to -Gx))$.

なぜ存在仮定が必要かを知ることは困難ではない．いかなるものもFをもたないならば，連式 133 によって，$(x)(Fx \to Gx)$ と $(x)(Fx \to -Gx)$ は真であろう（146 は実際に，相互導出可能性に強化できる)．同様に(5)および(6)に対しては，たかだかつぎの結果しかえられない．

147　$(\exists x)Fx \vdash (x)(Fx \to Gx) \to (\exists x)(Fx \mathbin{\&} Gx)$

148　$(\exists x)Fx \vdash (x)(Fx \rightarrow -Gx) \rightarrow (\exists x)(Fx \ \& \ -Gx)$.

というのは，いかなるものも F をもたないならば，133によって $(x)(Fx \rightarrow Gx)$ であってそして $(x)(Fx \rightarrow -Gx)$ であるということは真であろうが，しかるに $(\exists x)(Fx \ \& \ Gx)$ であってそして $(\exists x)(Fx \ \& \ -Gx)$ であるということは，明らかに偽であろうからである．(7)と(8)は，存在仮定なしに定理となるが，これに対して(9)はふたたび $(\exists x)Fx$ が仮定されることを必要とする．

対当の正方形は，伝統的関係がそのなかにおいて成り立つ述語計算に対して定式化されうるが，ここにおいては，A-，E-，I-，O- 形式のかわりに，簡単な量記号形式 '$(x)Fx$'，'$(x)-Fx$'，'$(\exists x)Fx$' および '$(\exists x)-Fx$' を用いることによって定式化されうる．というのは，つぎのすべてを定理として証明しうるからである．

149　$\vdash -((x)Fx \longleftrightarrow (\exists x)-Fx)$

150　$\vdash -((x)-Fx \longleftrightarrow (\exists x)Fx)$

151　$\vdash -((x)Fx \ \& \ (x)-Fx)$

152　$\vdash (\exists x)Fx \ \mathrm{v} \ (\exists x)-Fx$

153　$\vdash (x)Fx \rightarrow (\exists x)Fx$

154　$\vdash (x)-Fx \rightarrow (\exists x)-Fx$

(証明は初等的である)．152は，これに対応する伝統的論理学における結果⒁と比較されるべきである．152は⒁とは異なり，あるものがFをもつ，を必然的に伴なうのではなく，あるものが存在する，を必然的に伴なうのである．そのあるものはFをもつかあるいはもたないかである．よって152が成立つ．こうして152の明らかにすることは，述語計算が空ならざる話の世界における解釈に依存するということである．もしいかなるものも存在しないとするならば，152は偽であろう．しかし三段論法の理論は，いかなる名辞も空ではない，すなわち，すべての性質は値 (instances) をもっているという，さらにもっと驚くべきことを仮定するのである．

さて妥当な三段論法のパターンを示すために，命題の格とタイプのみが示

されるような便利な略記法をわれわれは採用する．たとえば，'I EIO' は，第Ⅰ格のパターンで，大前提がE，小前提がI，結論がOであるものをさす．それ故，このパターンの標準的な例はつぎのものである．

$$\text{(15)}\quad \begin{array}{l} \mathrm{E}(G, H) \\ \mathrm{I}(F, G) \\ \hline \mathrm{O}(F, H). \end{array}$$

三段論法に対応する述語計算の連式ということによって，三段論法の2つの前提が仮定として（翻訳されて）現われ，そして三段論法の結論が結論として（翻訳されて）現われるような連式を意味することにしよう．たとえば，(15)に対応する連式はつぎの通りである．

$$(x)(Gx \rightarrow -Hx),\ (\exists x)(Fx \ \&\ Gx) \vdash (\exists x)(Fx \ \&\ -Hx).$$

つぎの表は24の妥当な三段論法のパターンを，格に従って示したものである．これらのパターンの標準的な例を導出する際には，表に示してある通り，9つの場合には特別の存在仮定を必要とする．

I AAA	II EAE	†III AAI	§IV AAI
I AII	II AEE	III AII	IV AEE
I EAE	II AOO	III IAI	†IV EAO
I EIO	II EIO	†III EAO	IV EIO
*I AAI	*II EAO	III EIO	IV IAI
*I EAO	*II AEO	III OAO	*IV AEO

*：$(\exists x)Fx$ を付加的仮定として必要とする．

†：$(\exists x)Gx$ を付加的仮定として必要とする．

§：$(\exists x)Hx$ を付加的仮定として必要とする．

これまでに出て来た練習問題を全部解いた辛抱強い読者は，上の表の三段論法に対応する13の連式（102，3.2.2(a)−(d)，106，3.3.2(a)−(g)）の妥当性を既に示したことになる．そのような読者はここでその13の連式が上の表の13の三段論法と同じであることを確かめたいと思うであろう．存在仮定

が必要とされるのは，特称の結論が2つの全称の前提から導かれるような，正確に9つの妥当な三段論法のパターンであって，その何故であるかを知ることは困難ではない．なぜなら，三段論法のすべての3つの名辞が空であるならば，全称的前提は133によって真となるであろうが，それに対してその結論は偽となるであろうからである．しかしながら，妥当性を示すために，1つ以上の存在仮定を必要とすることは決してないのである．たとえば，IV AAI の場合には，われわれは述語計算においてつぎの連式を導出することができる．

155 $(\exists x)Hx,\ (x)(Hx \to Gx),\ (x)(Gx \to Fx) \vdash (\exists x)(Fx\ \&\ Hx)$.

なぜならば，105によって，$(\exists x)Hx$ と $(x)(Hx \to Gx)$ から $(\exists x)Gx$ が帰結し，$(\exists x)Gx$ と $(x)(Gx \to Fx)$ から，$(\exists x)Fx$ が帰結するからである．

これらの結果から，伝統的な三段論法の理論と述語計算の間の関係が生じてくる．対当の正方形の原理，換位の法則，そして24個の妥当な三段論法のパターンは，すべて述語計算の定理または連式として導出可能である．幾つかの場合には特別の存在仮定がなければならないことは明らかである．しかしこれは，二者の間の基本的な相異のしるしとしてよりはむしろ，述語計算が，三段論法の拠って立つ基礎をはっきりさせる助けとなるという事情を示すものとみなされてよいであろう．事実上，伝統的理論は，命題の4形式を特殊な研究のために選んだ述語計算の一断片であって，それはまたこれら4つの形式の命題に現われる名辞が空でないことを仮定するものである，ということになる．述語計算は，少なくともそれが空名辞を認める点において，より一般的な研究である．これまでの節においてわれわれは，4つの伝統的形式のいずれでもない命題が現われる論証を取り扱うことを，述語計算がどのようにして可能ならしめるかを見てきた．次の節においては，三段論法の理論によっては取り扱うことのできない，関係の特性を形式的に取り扱うことを，述語計算はどのようにして可能ならしめるかを見るであろう．

練 習 問 題

A，E，I，あるいはOの第1の名辞をその主語，そして第2の名辞をその述語とよぶことにしよう．また，否定的命題の述語と全称的命題の主語を周延されている (distributed) とよぶことにし，これに対して，肯定的命題の述語と特称的命題の主語は周延されていない (undistributed) ものとする．「周延されている」を‘d’，「周延されていない」を‘u’を用いて表わすと，これらの規約はつぎの表に示される．

A(F, G)	E(F, G)
d　u	d　d
I(F, G)	O(F, G)
u　u	u　d

さて三段論法の一般的原理はつぎのように述べられるであろう．

A　量の規則 (Rules of Quantity)

1　いかなる名辞も，妥当な三段論法の結論のなかで周延されているためには，それが現われる前提のなかで周延されていることが必要である．

2　妥当な三段論法の中名辞は，少なくとも1回は周延されている．[2)]

B　質の規則 (Rules of Quality)

1　妥当な三段論法の結論が否定であるのは，その前提の1つが否定であるときまたそのときに限る．

2　2つの否定的前提をもつ妥当な三段論法は存在しない．

これらの規則から非形式的につぎのことを示せ：

(a)　いかなる妥当な三段論法も，2つの特称の前提を含まないこと（ヒント：可能な組み合わせは II, IO, OI, OO に限られ，そのうち最後のものはB2を破り，また第1のものは，周延の表により，A2を破る．他の2つの場合には，三段論法が妥当であるべきであるならば，B1により結論はOまたはEでなければならない．しかるにそのいずれの場合

にもその述語は周延されている．従ってＡ１により，大前提においてもまた周延されていることになる．すなわち矛盾が導かれる)．

(*b*) 特称の前提をもついかなる妥当な三段論法も，全称の結論をもたないこと（ヒント：結論がＡであるとするならば，Ａ１およびＡ２により，小名辞，中名辞ともに，前提において周延されている必要があるであろう．また結論がＥであるとするならば，Ａ１およびＡ２により，小名辞，大名辞，中名辞ともに，前提において周延されている必要があるであろう．Ｂ１とＢ２を用い，前提の可能な組み合わせのうちに，これを許すものがないことを示せ)．

(*c*) 256個の可能な三段論法のパターンのうち，Ｂ２は64個を妥当でないとして除去し，(*a*)の結果はさらに48個を除去し，規則Ｂ１はさらに72個を除去し，そして(*b*)の結果はさらに24個を除去すること（こうして総計208個のパターンがもはや不妥当であることが示されてしまった)．

(*d*) 第Ⅰ格の妥当な三段論法は，肯定の小前提と全称の大前提をもたねばならないこと．

(*e*) 第Ⅱ格の妥当な三段論法は，１つの否定の前提をもたねばならず，また大前提は全称的でなければならないこと．

(*f*) 第Ⅲ格の妥当な三段論法は，特称の結論をもたねばならず，また結論が否定であるならば，大前提もまたそうでなければならないこと．

((*d*)—(*f*)によって，(*c*)のあとに考察さるべきものとして残る48個のパターンのうち，18個は第Ⅰ—Ⅲ格において妥当であることが示され，18個は不妥当であることが示される．残る12個のうち，６個は第Ⅳ格において妥当であることが示され，また残りの６個は，それぞれの場合を考察することによって，妥当でないことが示されうる——第Ⅳ格に対しては，簡単な規則がない．)

注1) 証明のためには，第２章第２節における，同様の（命題計算の）連式45の証明を参照せよ．

2) この規則を破ることは，時として周延されていない中名辞の誤謬 (fallacy of

undistributed middle) とよばれるものを犯すことである。

第5節　関係の特性

ある文を選び，これから固有名を除くと述語がえられる．この述語は性質を表わす，とわれわれは言う．たとえば，「酸素は元素である」から固有名「酸素」を除くと，述語「……は元素である」がえられる．これは元素であるという性質を表わす．あるいは「すべての人はメアリを好む」から「メアリ」を除くと，述語「すべての人は……を好む」がえられる．これはすべての人によって好まれるという性質を表わす．述語計算においては，述語は1変数の命題関数となる．元素であることは 'x' に関する 'Ex' によって表わされ，すべての人によって好まれることは，'x' に関する '$(y)Lyx$' によって表わされるであろう．

文から2つあるいはそれ以上の固有名を除くと，(2項あるいは多項) 関係の表現がえられ，これが関係を表現する，とわれわれは言うのである．たとえば，「ブルータスはシーザーを殺した」から「ブルータス」と「シーザー」を除くと，2項関係的表現「……は……を殺した」がえられる．これはある関係を表わす．述語計算においては，関係の表現は，2変数あるいはそれ以上の変数の命題関数となる．殺すという関係は 'x' と 'y' に関する 'Kxy' によって表わされるであろう．

任意の数の変数に関する命題関数が，命題を表現する wffs に変えられうるおもな方法が2つあり，そして両者は組み合わされることもあるであろう．すなわち，命題関数のなかの変数をタームによって置き換えるか，あるいは量記号を命題関数の前に置くかである．たとえば，'Kxy' から，これらのアプローチを組み合わすことにより，wff '$(x)Kxm$' がえられる．

わたしは，性質をも，また関係をも，定義しない．これらの概念は，実例によって理解されるものと考えられる．説明の過程はどこかで停まらなければならないのである (もっとも，実際にここで停まってしまう必要はないけれ

ど). この節の残りの部分では, 関係を表わすために, ‘F’ のかわりに ‘R’ を用いるという, 通常の論理学におけるならわしに従うであろう. もちろん‘R’は, ‘F’, ‘G’, ‘H’, …… とならんで述語文字のなかまである. しかしわれわれが取り扱っているのは関係であるということを, 強調しておくのが助けとなるであろう. (2変数の命題関数によって表現される) 2項関係 (dyadic relations) のみが考察されるであろう.

われわれは実際, 関係がもつであろういろいろの重要な特性を定義するであろう. そしてこれらの特性の間の相互関係を研究するであろう. まず第1に, 関係Rは, 任意のxとyに対して, Rがxとyの間に成り立つならばRがyとxの間に成り立つとき, 対称的 (symmetric) である, と言われる. 記号で書けば, Rは

(1)　$(x)(y)(Rxy \rightarrow Ryx)$

であるときまたそのときに限って対称的である. 同じ年齢であるという関係は対称的である. なぜならば, 任意のaとbに対して, aがbと同じ年齢であるならば, bはaと同じ年齢だからである. 兄弟あるいは姉妹であるという関係は対称的である. なぜならば, aがbの兄弟あるいは姉妹であるならば, bはaの兄弟あるいは姉妹であるからである. 他方, 兄あるいは弟であるという関係は対称的ではない. なぜならば, チャールズ王子はアン王女の兄あるいは弟であるが, アン王女はチャールズ王子の兄あるいは弟ではないからである. 一般に, 関係Rが対称的でないことを示すためには, Rmn であって $-Rnm$ であるような対象mとnが挙げられる必要がある. なぜならば, (1)の否定はつぎの命題と同値 (相互に導出可能) だからである.

(2)　$(\exists x)(\exists y)(Rxy \ \& \ -Ryx)$.

隣りに置かれているという関係は対称的である. しかし右に置かれているという関係はそうではない. 定理139に照らして考えると, 同一性の関係 $=$ は対称的である. ‘R’ を ‘$=$’ と解釈すれば, 実際(1)は139になる.

第2に, 関係Rは, 任意のxとyに対して, Rがxとyの間に成り立つな

らば R が y と x の間に成り立たないとき，非対称的 (asymmetric) である．記号で書けば，R は

$$(3)\quad (x)(y)(Rxy \to -Ryx)$$

であるときまたそのときに限って非対称的である．

親であるという関係は非対称的である．なぜならば，a が b の親であるならば，b は a の親ではないからである．より小であるという数的関係は非対称的である．なぜならば，a が b より小であるならば，b は a より小ではないからである．この関係を表わすために '$<$' を用いて，$(x)(y)(x<y\to -y<x)$ という数学の真理がえられる．これは 'R' を '$<$' と解釈すると(3)を満たす．

愛することは非対称的関係ではないように思われる．というのは，アントニーはクレオパトラを愛したが，しかしまたクレオパトラもアントニーを愛したからである．一般に，R が非対称的でないことを示すためには，Rmn であると同時に Rnm であるような対象 m と n が挙げられる必要がある．なぜならば，(3)の否定はつぎの命題になるからである．

$$(4)\quad (\exists x)(\exists y)(Rxy \mathbin{\&} Ryx).$$

より小であるかあるいは等しい（記号で '$\leq$'）という数学的関係は非対称的ではない．なぜならば，$2\leq 2$ でありそして $2\leq 2$ だからである．従って $(\exists x)(\exists y)(x\leq y \mathbin{\&} y\leq x)$――これは EI を 2 回適用することによって帰結する．(3)および(4)は，x と y が相異なる対象であることを必要としない．関係 R は，任意の相異なった x と y に対して，R が x と y の間に成り立つならば R が y と x の間に成り立たないとき，反対称的 (antisymmetric) であると言われてよい．記号で書けば，R は

$$(5)\quad (x)(y)(x\neq y \mathbin{\&} Rxy \to -Ryx)$$ [1)]

であるときまたそのときに限って反対称的である．すると $\leq$ は，非対称的ではないが，反対称的である．なぜならば，a と b が $a\leq b$ であるような相異なる数であるとすれば，$-b\leq a$ ということが帰結するからである．反対

称性の定義の(5)と同値な定式化はつぎの通りである.

(6)　$(x)(y)(Rxy \mathbin{\&} Ryx \rightarrow x=y)$

——関係Rがxとyの間に，またyとxの間に成り立つような任意のxとyに対して，xとyとが同一であるとき，またそのときに限って，関係Rは反対称的である.

これまでに定義された関係の特性の間の相互関係を研究するために，まず第1に気づかれる点は，関係は通常は対称的であると同時に非対称的であることはないであろう，ということである．しかし，関係がいかなるものの間にも成り立つことがないという，極端な場合には，それがあるであろう．なぜならつぎのことは容易に証明されるからである.

156　$-(\exists x)(\exists y)Rxy \vdash (x)(y)(Rxy \rightarrow Ryx)$

157　$-(\exists x)(\exists y)Rxy \vdash (x)(y)(Rxy \rightarrow -Ryx)$

(これらは133の「関係についての類似定理」である)．たとえば，女の兄弟であるという関係はいかなる対象の間にも成り立たない．従ってそれは，対称的でもあり非対称的でもある(またその点に関しては反対称的でもある)．他方，いやしくも関係が成り立つならば，それは対称的であって非対称的であることはありえない．われわれはつぎの結果をたやすく証明できる.

158　$(\exists x)(\exists y)Rxy \vdash -((x)(y)(Rxy \rightarrow Ryx) \mathbin{\&} (x)(y)(Rxy \rightarrow -Ryx))$.

158に存在仮定が必要なのは，前節に見た，三段論法の理論のある原理の場合にも，同様の必要が生ずるのと密接に対応している.

いやしくも関係が成り立つならば，それが対称的であって非対称的である，ということはありえないのであるが，関係はそのいずれでもないかも知れない．たとえば，上に非対称的でないことが見られた，愛する関係は，また対称的でもない．片思いの例はすべて(2)を満たすであろう．関係Rが対称的でもなく非対称的でもないならば，Rは不対称的 (non-symmetric) であると言ってよいであろう．その記号的定義は，単に(2)と(4)の連言を作ることによってえられる．そこでわれわれは，任意の関係は，対称的であるか非対称的である

か不対称的であるかであるということを，絶対的に証明できる．またわれわれは，いやしくも関係が成り立つならば，それはこれら3つのうちのひとつ以上のものではないことを，証明することができる．(関係が成り立たないならば，それは対称的でありまた非対称的ではあるが，不対称的ではない．)

任意の非対称的関係は反対称的である．つぎの結果は容易に証明される．

159　$(x)(y)(Rxy \to -Ryx) \vdash (x)(y)(x \neq y \ \& \ Rxy \to -Ryx)$.

——Rが非対称的になる条件が与えられるならば，Rが反対称的であるための条件が帰結する．その逆が成り立たないことは言う迄もない．なぜならば，$\leq$ は反対称的であるが，非対称的ではないからである．$\leq$ は対称的でない($3 \leq 4$ であるが，$4 \leq 3$ は真ではない)から，$\leq$ は，不対称的であるところの反対称的関係の例として役立つ．反対称的関係は，また対称的でもありうる．奇妙なことではあるが，$=$ がそのひとつの例である．なぜならば，$(x)(y)(x \neq y \ \& \ x=y \to y \neq x)$ は容易に証明されるところだからである．

多くの関係がもっている，全く上とは異なった特性は推移性 (transitivity) のそれである．関係Rは，任意のx，y，およびzに対して，xとyの間にRが成り立ちそしてyとzの間にRが成り立つならば，xとzの間にRが成り立つとき，推移的である．従って，Rは

(7)　$(x)(y)(z)(Rxy \ \& \ Ryz \to Rxz)$

であるときまたそのときに限って推移的である．同じ年齢であるという関係は，対称的であると同時に推移的でもある．なぜならば，aがbと同じ年齢であり，そしてbがcと同じ年齢であるならば，aはcと同じ年齢であるからである．同一性は140に照らして推移的である．$<$ の関係は非対称的ではあるが，推移的であることは明らかである．$\leq$ も不対称的ではあるが，推移的である．故に推移性は，前に述べた区別を真二つに横断するものである．しかしながら，同一でない(異なる)という関係は，しばしばそう思われているように，推移的なのではない．たとえば，$10 \neq 11$ でありそして $11 \neq 7+3$ であるが，しかし $10=7+3$ である．(7)は，x，y，そしてzが相異

なる対象であることを規約していない．

Rは

(8)　$(x)(y)(z)(Rxy \ \& \ Ryz \rightarrow -Rxz)$

であるときまたそのときに限って非推移的 (intransitive) である．親であるという関係は非推移的（そして非対称的）である．なぜならば，aがbの親でありそしてbがcの親であるならば，aはcの親ではない（祖父あるいは祖母である）からである．1だけ異なるという数的関係は非推移的である．なぜならば，aがbと1だけ異なり，そしてbがcと1だけ異なるならば，$a=c$であるかあるいはaはcと2だけ異なるかであって，そしていずれの場合にもaはcと1だけ異なることはないからである．この関係はまた対称的でもある．また非推移的な不対称的関係も存在する．そのひとつの例を考えてみよ．

関係Rは

(9)　$(\exists x)(\exists y)(\exists z)((Rxy \ \& \ Ryz) \ \& \ -Rxz)$

であるときまたそのときに限って推移的でない．(9)は(7)の否定を適当に変形することによってえられる．同様にして，Rは

(10)　$(\exists x)(\exists y)(\exists z)((Rxy \ \& \ Ryz) \ \& \ Rxz)$

であるときまたそのときに限って非推移的でない．不対称性の定義に平行して，Rが推移的でもなくまた非推移的でもない場合に，Rを不推移的 (non-transitive) であると定義してもよいであろう．記号的定式化は，(9)と(10)の連言によってえられる．先程述べた関係の場合と同じように，関係Rが成り立たないとするならば，Rは推移的であると同時に非推移的である．さらに，すべての関係は，推移的であるかあるいは非推移的であるかあるいは不推移的であるかである．

さらに3つの関係の特性が重要である．しかし，以下に見るであろうが，それらは上に述べた特性から独立ではない．関係Rは，任意のxに対して，xとx自身の間にRが成り立つならば，反射的 (reflexive) である．従って

Rは,

(11)　$(x)Rxx$

であるときまたそのときに限って反射的である．138に照らして，＝は反射的である．同じ年齢である，同じ高さである，同じ色の眼をしている，同じ両親をもっている，もまたそうである．なぜならば，すべての人は彼自身の年齢であり，高さであり，等々だからである．他方，任意のxに対して，xとxの間にRが成り立たないならば，Rは非反射的 (irreflexive) である．従ってRは

(12)　$(x)-Rxx$

であるときまたそのときに限って非反射的である．異なるという関係は非反射的関係である．関係Rは反射的でも非反射的でもないかも知れない．そしてつぎのような場合にそうであろう．

(13)　$(\exists x)Rxx \ \& \ (\exists x)-Rxx.$

その場合にわれわれは，Rが不反射的 (non-reflexive) であると言う．恐らく愛することは不反射的であろう．自分自身を愛する人たちがいる（故に非反射的でない）し，また自分自身を愛さない人たちがいる（故に反射的でない）．

すべての関係は，反射的であるかあるいは非反射的であるかあるいは不反射的であるかである．そしてこれら3つのうちの1つ以上のものではない．このことは，関係が成り立つと成り立たないとに関わりなく真である．なぜならば，関係が全然成り立たないならば，その関係は非反射的であるが，反射的でもなければ不反射的でもないからである．われわれはつぎの結果を容易に証明することができる．

160　$-(\exists x)(\exists y)Rxy \vdash (x)-Rxx$

161　$-(\exists x)(\exists y)Rxy \vdash -(x)Rxx$

162　$-(\exists x)(\exists y)Rxy \vdash -((\exists x)Rxx \ \& \ (\exists x)-Rxx).$

いま見られた一群の特性と，対称性と推移性の関係をめぐってむらがってい

る，先程見られた一群の特性の間の相違は，本質的にはつぎのことから生じるのである．すなわち，最後の3つの定義は形式が条件法ではなく，従って，先程見られた場合においてそうであったように，前件がつねに偽であるからといって，トリヴィアルに真となるということはありえないのである．実際，161は，いかなる世界も空ではないというわれわれの仮定を反映している．関係が反射的ならば，すなわち $(x)Rxx$ ならば，104によって，$(\exists x)Rxx$ が帰結し，その結果として R は少なくともある場合には成り立つのである．

関係の10個の定義された特性の間に存在するいろいろの相互関係のうち，3つの最も重要なものがつぎの3つの連式において証明される．第1に，つぎの連式から知られる通り，すべての非対称的関係は非反射的である．

163　$(x)(y)(Rxy \rightarrow -Ryx) \vdash (x)-Rxx$

1	(1)	$(x)(y)(Rxy \rightarrow -Ryx)$	A
1	(2)	$(y)(Ray \rightarrow -Rya)$	1 UE
1	(3)	$Raa \rightarrow -Raa$	2 UE
1	(4)	$-Raa$	3 SI(S) 23
1	(5)	$(x)-Rxx$	4 UI

(1)の行において非対称性の条件を仮定し，(5)の行において非反射性の条件を導出する．証明の要領は，2回とも同じ任意の名前‘a’を用いて，UEを2回適用することである．読者は，(2)から(3)への段階の健全性が理解されるならば満足してよい．(3)から(4)への段階は命題計算のレベルにおいて行なわれる．

第2に，すべての非反射的で推移的な関係は非対称的である．164において，非対称性の条件を，非反射性と推移性の条件から結論する．

164　$(x)-Rxx,\ (x)(y)(z)(Rxy \ \& \ Ryz \rightarrow Rxz) \vdash (x)(y)(Rxy \rightarrow -Ryx)$

1	(1)	$(x)-Rxx$	A
2	(2)	$(x)(y)(z)(Rxy \ \& \ Ryz \rightarrow Rxz)$	A

2	(3)	$(y)(z)(Ray \& Ryz \rightarrow Raz)$	2 UE
2	(4)	$(z)(Rab \& Rbz \rightarrow Raz)$	3 UE
2	(5)	$Rab \& Rba \rightarrow Raa$	4 UE
1	(6)	$-Raa$	1 UE
1, 2	(7)	$-(Rab \& Rba)$	5, 6 MTT
1, 2	(8)	$-Rab \vee -Rba$	7 SI(S) 1.5.1(g)
1, 2	(9)	$Rab \rightarrow -Rba$	8 SI(S) 48
1, 2	(10)	$(y)(Ray \rightarrow -Rya)$	9 UI
1, 2	(11)	$(x)(y)(Rxy \rightarrow -Ryx)$	10 UI

この証明の要領は(4)から(5)への UE の適用である．そこでは，既に出ている'a'を用いて'z'が除去される． これによって後件 Raa がえられるが，その否定を (1) から導くことができるので ((6)の行)，命題計算の推論によって(9)へと進む道が開かれる．(1)と(2)はいずれも'a'と'b'を含まないから，(10)および(11)における UI の適用は正当とされる．

第3に，すべての非推移的関係は非反射的である．このことを述べている連式は，基本的に 163 の連式と類似している．

165 $(x)(y)(z)(Rxy \& Ryz \rightarrow -Rxz) \vdash (x)-Rxx$

1	(1)	$(x)(y)(z)(Rxy \& Ryz \rightarrow -Rxz)$	A
1	(2)	$(y)(z)(Ray \& Ryz \rightarrow -Raz)$	1 UE
1	(3)	$(z)(Raa \& Raz \rightarrow -Raz)$	2 UE
1	(4)	$Raa \& Raa \rightarrow -Raa$	3 UE
5	(5)	Raa	A
5	(6)	$Raa \& Raa$	5, 5 &I
1, 5	(7)	$-Raa$	4, 6 MPP
1, 5	(8)	$Raa \& -Raa$	5, 7 &I
1	(9)	$-Raa$	5, 8 RAA
1	(10)	$(x)-Rxx$	9 UI

これらの3つの原理から，関係がどのように組み合わされた特性をもちえないかについて，いろいろの結論が導かれるであろう．ひとつの例を挙げれば十分であろう．関係が成り立つ以上は，それは非反射的であって推移的であって対称的であることはできない．なぜならば，関係が非反射的であって推移的であるならば，164によって非対称的だからである．また関係が成り立つ以上は，先程見た通り，それは同時に対称的であって非対称的であることはできない．この結論が，関係が成り立つという仮定に，本質的に依存していることに注意することが大切である．なぜならば，$-(\exists x)(\exists y)Rxy$ ならば，Rは同時に非反射的でありまた推移的でありまた対称的であるからである．

関係の研究は，この書物において行なうことができるよりも，遙かに先まで続けて行くことができる．しかしそれは，述語計算よりも，より一般的な論理学的分野のわくぐみのなかで行なわれるのが最もよい．現在この仕事のために便利な学問分野は，クラスの理論 (theory of classes)，すなわち，対象のクラス，およびクラスに属する対象とクラス自身の間の元であるという関係の研究である．クラスによって，関係の概念はそれ自身として定義されうる——関係は実際上，特殊な種類のクラスであることがわかる．クラス理論は実際，非常に強力な論理的体系なので，すべての数学的概念はそのなかで定義されうるのである．すなわち，自然数，有理数，実数は特殊な種類のクラスとして取り扱われうる．この可能性は，一部の哲学者たちに，すべての数学は論理学へ還元されうるというテーゼを唱えさせることになった——これもまたこの書物のなかでは議論することのできない問題であるが．しかしながら，クラス理論の研究は，さらに研究を進めたいと思う読者が踏むべきつぎの段階とみなされてよいであろう．優れた入門書は Suppes〔25〕である．また本書の付録Bには，この理論のはじめの段階の概説が与えてある．

正確に表現するための記法を展開することはしなかったが，関係との関連で，普通に用いられるある概念があるので，参照の便利のため，ここにそれらの概念についての非形式的な説明は与えておいてもよいであろう．形式的

な説明はやがてクラス理論のなかで行なわれる．関係Rの変域 (domain) によって，われわれは，あるものに対して関係Rをもつ対象のクラスを理解する．たとえば，愛するという関係の変域は，すべての愛する人のクラスであり，親であるという関係の変域は，すべての父と母のクラスである．他方，関係Rの逆の変域 (converse domain，時として値域 range ともよばれる) によって，われわれは，あるものがそれらに対して関係Rをもつような対象のクラスを理解する．たとえば，愛するという関係の逆の変域はすべての愛されるもののクラスであり，親であるという関係の逆の変域は，すべての親をもつもののクラスであり，それは，聖書を信ずべきであるとするならば，すべての人を包含しない．関係Rの場 (field) とは，Rの変域に含まれるか，あるいは逆の変域に含まれるかであるもののクラス，すなわち，実際上，あるものに対して関係Rをもつか，あるいはあるものがそれらに対して関係Rをもつようなもののクラスのことである．たとえば，愛するという関係の場は，愛するものあるいは愛されるもののクラス——多分スクルージを元として含んでいないクラスである．いかなるものについても成り立たない関係は空なる場——元をもたない場——をもつ．

これらの考えの，いますこし形式的な説明はつぎのようなものであろう．aがRの変域に属するのは

(14)　$(\exists x)Rax$

なるときまたそのときに限る．aがRの逆の変域に属するのは

(15)　$(\exists x)Rxa$

なるときまたそのときに限る．aがRの場に属するのは

(16)　$(\exists x)Rax \vee (\exists x)Rxa$

なるときまたそのときに限る．

われわれはこの点から先へ，論理学の形式的展開を進めて行くことはしないであろう．しかしながら，文献表には，この先に何を読めばよいかを示してある．

練　習　問　題

1　(*a*)　本文中の(5)と(6)の相互導出可能性を証明せよ.

(*b*)　本文中の連式 156—162 の妥当性を証明せよ.

2　$(x)(\exists y)Rxy$ であるならば，すなわち，すべてのものがあるものに対して関係Rをもつならば，関係Rを連続的 (serial) であるとよぶことにしよう．たとえば，より小である (‘<’) という関係は，自然数の世界において連続的である．なぜならば，任意の数に対して，それがより小であるような数が存在する（最大の自然数が存在しない）からである.

(*a*)　$=$ が連続的であることを証明せよ．すなわち，$\vdash (x)(\exists y)(x=y)$ を証明せよ.

(*b*)　関係Rが連続的ならば，Rは空ではないことを証明せよ．すなわち，$\vdash (x)(\exists y)Rxy \rightarrow (\exists x)(\exists y)Rxy$ を証明せよ.

(*c*)　すべての連続的でありまた推移的でありまた対称的である関係は反射的であることを証明せよ.

3　関係が推移的であるとして，それが非対称的であるときまたそのときに限って非反射的であることを示せ.

4　兄弟あるいは姉妹である，という関係は，直観的には，同時に推移的でありまた非反射的であるようにみえる．このことから 164 により，それは非対称的であるということが帰結するであろう．しかるにこれがそうでないことは明瞭である．このパラドックスをどのように説明するか.

5　Rが同時に対称的でありまた反対称的であるとして，いかなる2つの相異なるものも互いにRという関係に立たないこと (すなわち，$(x)(y)(x\neq y \rightarrow -Rxy)$)，さらにまた，$R$は推移的であること，を証明せよ．従って，$R$が反射的，対称的，そして反対称的であるならば，$(x)(y)(Rxy \longleftrightarrow x=y)$ なることを示せ．（このことは事実上，同一性が唯一の反射的で対称的で反対称的な関係であることを示している.）

6　いかなる関係もつぎのようなものではありえないことを示せ.

（a）　非推移的であって反射的

（b）　非対称的であって不反射的

（c）　推移的であり反射的であり非対称的

（d）　推移的であり不対称的であり非反射的.

7　（a）　156—158 から，関係R は，$-(\exists x)(\exists y)Rxy$ なるときまたそのときに限って，対称的であると同時にまた非対称的である，ということが帰結することがたやすく知られる．これに対応して，関係 R は，$-(\exists x)(\exists y)(\exists z)(Rxy \;\&\; Ryz)$ なるときまたそのときに限って，推移的であると同時にまた非推移的であることを証明せよ.

（b）　従って，Rが推移的であると同時にまた非推移的であるならば，R は非対称的であることを証明せよ.

注1）われわれは '$x \neq y$' を '$-(x=y)$' の便利な略記法として用いる.

付録A 標　準　形

初等論理学のコースには標準形の取り扱いを含めるのがならわしである．標準形には真理表の方法との関連においてある興味がもたれる．なぜならば，標準形は wff がトートロジー的であるか，偶然的であるか，不整合であるかについて，独立のテストができるようにするからである．それはまたある命題計算の完全性の証明においても用いられている（たとえば Basson and O'Connor〔1〕を見よ）．しかしながら，本書において与えられた完全性の証明は（第2章第5節），標準形には依存しないので，わたしはそれの説明を付録にまわしたのである．以下の論述は，第2章第3節の術語を前提して行なわれる．

標準形を定義することからはじめよう．まず，アトム（atom）を，命題変数または否定された命題変数の意味に理解する．たとえば，

$$`P\text{'},\ `-P\text{'},\ `Q\text{'},\ `-R\text{'},\ `S\text{'}$$

はすべてアトムである．しかし

$$`--Q\text{'}$$

はアトムではない．$A_1, \cdots\cdots, A_n$ を n 個のアトムを列挙したものとしよう．ここで n は1より大かあるいは1に等しいものとする．つぎに，基本的選言(elementary disjunction)〔e. d.〕をつぎのかたちをした式の意味に理解する．

$$(A_1 \vee A_2 \vee \cdots\cdots \vee A_n).$$

こうして，'v' によってつながれた任意のアトムのリストは，基本的選言であるとみなされる．たとえばつぎのものはすべて基本的選言である．

$$`(P \vee Q)\text{'}$$

$$`(-P \vee Q \vee -R)\text{'}$$

'$(-Q \vee P \vee Q \vee -S)$'

'$(P \vee P \vee -Q)$'.

$n=1$ である極限的な場合には，ただ1つのアトムがそれだけで，これもまた基本的選言とみなされる．上の第3の例におけるごとくに，同じ変数がひとつの e.d. のなかで，否定されて現われると同時に否定されないでも現われることがあるであろう．また第4の例におけるごとく，同じアトムが1回以上現われることがあるであろう．

これに対応して，基本的連言 (elementary conjunction)〔e.c.〕を，アトム A_1, ……, A_n に関するつぎの形式の式の意味に理解する．ここで n は1より大かあるいは1に等しいものとする．

$$(A_1 \& A_2 \& \cdots\cdots \& A_n).$$

任意の e.d. は，そのなかのすべての 'v' が '&' に変えられるならば，e.c. となり，そして逆も真である．また，極限的な場合には，アトムがそれだけで e.c. とみなされる．

連言標準形 (conjunctive normal form)〔C.N.F.〕をつぎの形式の式であると理解する．ここで，1より大かあるいは1に等しい n に対して，A_1,……, A_n は基本的選言である．

$$A_1 \& A_2 \& \cdots\cdots \& A_n.$$

従って C.N.F. は '&' によってつながれた一連の e.d. である．たとえばつぎのものはすべて C.N.F. であって，第2のものはただ1つのアトムをその第2の e.d. とし，第3のものは同じ e.d. をその2個の連言項としている．

'$(P \vee Q)\&(P \vee -Q \vee R)\&(-R \vee S)$'

'$(P \vee -P \vee Q)\&-S$'

'$(P \vee -Q)\&(P \vee -Q)$'

$n=1$ である極限的な場合には，ただ1つの e.d. がそれだけで C.N.F. であるとみなされる．それ故，'$(P \vee Q)$' や，あるいは 'P' だけでさえもが，

C. N. F. であるとみなされる.

これに対応して，選言標準形 (disjunctive normal form) 〔D. N. F.〕をつぎの形式の式であると理解する．ここで1より大かあるいは1に等しいnに対して，A_1, ………, A_n は基本的連言である.

$$A_1 \vee A_2 \vee \cdots\cdots \vee A_n.$$

従って D. N. F. は‘v’によってつながれた一連の e. c. である．任意の C. N. F. は，すべての‘v’が‘&’に，すべての‘&’が‘v’に変えられるならば D. N. F. となり，逆もまた真である．$n=1$ である極限的な場合には，ただ1つの e. c. がそれだけで D. N. F. であるとみなされる.

これらの定義からの帰結として，すべての e. c. および e. d. は同時に C. N. F. であり，また D. N. F. である．たとえば，

$$‘P \ \& \ -Q \ \& \ R’$$

という e. c. を考えてみよう．これはその3つの e. d. がそれぞれ，ただ1つのアトムである極限的な場合の C. N. F. である．それはまた，e. c. の個数が1であるような極限的な場合には D. N. F. でもある．極度に極限的な場合として，ただ1つのアトムは，同時に C. N. F. でもありまた D. N. F. でもあるのである.

それでは，命題計算の任意の wff を C. N. F. および D. N. F. へ還元する手続を述べよう．これは，任意の wff に対して，適切な意味における，それに同値な C. N. F. および D. N. F. を見出すことにほかならないであろう．手続の段階はすべて同じ種類のもの，すなわち与えられた式の一部あるいは全部を，それに同値な式によって置き換えること，であろう．このために，われわれの仕事において必要とされるであろうつぎの相互条件法に注意する.

(1) $P \ \& \ P \longleftrightarrow P$

(2) $P \vee P \longleftrightarrow P$

(3) $P \ \& \ Q \longleftrightarrow Q \ \& \ P$

(4) $P \vee Q \longleftrightarrow Q \vee P$

(5) $P \& (Q \& R) \longleftrightarrow (P \& Q) \& R$

(6) $P \vee (Q \vee R) \longleftrightarrow (P \vee Q) \vee R$

(7) $--P \longleftrightarrow P$

(8) $P \rightarrow Q \longleftrightarrow -P \vee Q$

(9) $(P \longleftrightarrow Q) \longleftrightarrow (P \rightarrow Q) \& (Q \rightarrow P)$

(10) $-(P \& Q) \longleftrightarrow -P \vee -Q$

(11) $-(P \vee Q) \longleftrightarrow -P \& -Q$

(12) $P \vee (Q \& R) \longleftrightarrow (P \vee Q) \& (P \vee R)$

(13) $P \& (Q \vee R) \longleftrightarrow (P \& Q) \vee (P \& R)$.

(1)—(13)のすべては命題計算の定理として証明可能である．そしてまた真理表テストによってトートロジーでもある．（その大半は，テキストのなかの練習問題と証明された結果によってよく知られているはずである．）(1)と(2)は‘&’と‘v’に対する冪(べき)等律 (laws of idempotence) とよばれることがある．(3)と(4)は‘&’と‘v’に対する可換律（交換律，commutative laws）とよばれる．(5)と(6)は‘&’と‘v’に対する結合律 (associative laws) とよばれる．(7)は二重否定律 (law of double negation) である．(10)と(11)はド・モルガン律 (de Morgan's laws) の諸形式であり，そして(12)と(13)は分配律 (distributive laws) である．

真理表計算のために，‘$P \& Q \& -R$’や‘$-P \vee Q \vee R$’のような「複合的連言」あるいは「複合的選言」を，内側の括弧なしに書くことができるのは，結合律(5)および(6)によってである．厳密に言うと，そのような表現は wffs ではない（第2章第1節における定義を見よ）．従って C.N.F. も D.N.F. も一般的には wffs ではないであろう．しかし，真理表による評価に関する限りでは，括弧の挿入のされ方によって差異は生じない．このことは，これまた結合的である‘+’に関する，算術の場合の事情と比較されうるであろう．すなわち，$(x+y)+z=x+(y+z)$ であるから，括弧なしで 5+3+2 と書いても問題はないのである．それにひきかえ，‘−’は結

合的ではない．5−(3−2)=4 であるが，(5−3)−2=0 であるから，'5−3−2' は危険なまでに多義的である．同様に，論理学においても，'→' は結合的ではない．'$P \rightarrow (Q \rightarrow R) \longleftrightarrow (P \rightarrow Q) \rightarrow R$' は，読者が確かめていただきたいのであるが，トートロジーではない．('⟷' は結合的であろうか．)

同様に，可換律(3)および(4)によって，複合的連言あるいは選言の連言項あるいは選言項が現われる順序は，真理表による評価に影響を与えないであろう．また '&' と 'v' も算術における '+' に類似している．というのは，'+' に対して $x+y=y+x$ が成り立つからである．それとは対照的に，'−' は可換的ではない（5−3=2 であるが，3−5=−2 である)．また論理学の '→' も可換的ではない．なぜならば，$P \rightarrow Q \longleftrightarrow Q \rightarrow P$ はトートロジーではないからである．('⟷' は可換的であろうか．)

さらに，冪等律(1)および(2)によって，複合的連言または選言における重複した連言項または選言項を，真理表による評価に変更をもたらすことなく，除去することができるであろう．この点では，'&' と 'v' は，'+' とは異なっている．なぜならば，$x+x=x$ は明らかに算術的真理ではないからである '→' もまた冪等的ではない．('⟷' はどうであろうか．)

標準形への還元において，与えられた wff に対して，真理表テストのもとにおいてその wff に同値になるであろう標準形をわれわれは求めようとするのである．すなわち，その wff の変数への任意の付値に対して，標準形はもとの wff と同じ真理値をもつのでなければならず，従ってその wff とその標準形の相互条件法はトートロジーとなるであろう（第 2 章第 3 節における同値の定義を参照)．故に(1)—(6)によって，標準形を求める際に，そのようなやり方がわれわれの目的にかなうときにはいつでも，複合的連言および選言から括弧を除去し，そのなかに含まれている項の順序を入れ換え，また重複する項を除去することにするのである．さらに(7)によって，望むときにはつねに '−−' を自由に除去することにするであろう．なぜならば，そのようなやり方もまた真理表による評価に影響を与えないからである．

実際，wff を標準形に変形する際のわれわれのやり方は，すべて同じ種類のものである．すなわち，与えられた式の一部（時としては全部）を，真理表テストのもとにそれと同値なある式によって置き換えるのである．そして，われわれが用いる同値関係は(1)—(13)あるいはそれらの代入例のみである．この種のやり方が真理値の評価に影響を与えないであろうことは明らかでなければならないから，従ってその手続の最後に出てくる標準形は，望み通り，与えられた wff と同値になるであろう．しかし記録までに，われわれの仕事を導く置換の原理 (principle of replacement) を，証明はしないが，述べておくことにしよう．

（R）　任意の式A，B，C，Dに対して，AとBが同値であり，またCのなかにAが現われるある個所をBによって置き換えることによって，CからDがえられるならば，CとDは同値である．

実際，上に採ることにきめた方法（‘－－’の除去，連言における連言項の順序の入れ換え等）を根拠づけるのは，(1)－(7)ならびにこの原理なのである．

wff の C.N.F. および D.N.F. への還元は，便宜上2段階に分けられるであろう．その第1はどちらの標準形への還元にも共通である．

第Ｉ段階．この段階における目標は，つぎの3つの性質をもつ式をうることである．(i)‘－－’がどこにも現われない，(ii) 現われる結合記号は‘－’，‘&’，あるいは‘v’のみである，(iii)‘－’は命題変数の前にのみ現われ，いかなる場合にも，括弧の前には現われない（言うまでもなく，(iii)は事実上(i)を含意する）．

(i)については，この要求はたんに(7)により‘－－’を除去することによって満たされる．それ故，われわれの第1の手続は，与えられた wff のなかにおいて現われる‘→’あるいは‘⟷’をすべて除去することであろう．これは(8)および(9)によってはたされうる．というのは，(8)と(9)は，任意の条件法を，第1の選言項がその前件の否定であり，第2の選言項がその後件である

ような選言によって置換することを許し，また任意の相互条件法を，２つの条件法のある連言によって置換することを許し，そのそれぞれの条件法は，今度はたったいま記述した方法によって除去することができるからである．

この手続が完了すると，条件(ii)を満たす式がえられるであろう．しかしながら，‘－’がこの式においては括弧の外側に現われ，従って(iii)が満たされないような場合があるかも知れない．それにしても，括弧内の主結合記号はいまや，‘&’か‘v’でしかありえないから，その式は部分が

－(………&………)

の形式をしたものであるか，あるいは，

－(………v………)

の形式をしたものであるかである．第１の場合が生じたとするならば，われわれは(10)を適用し，その部分を，その選言項が括弧内のもとの連言項の否定であるような選言によって置換することができる．第２の場合が生じたとするならば，われわれは同様に(11)を適用し，否定された選言を否定された連言項をもつ連言によって置換することができる．これらのやり方の結果として，それでもなお，‘－’が括弧の前に現われる場合があるかも知れない．しかしこの種のやり方を繰り返すことによって，結局は‘－’を，現われるとしてもただ変数の前にのみ現われるように，式のなかへ入れてしまうことになるであろう．その結果，遅かれ早かれ，条件(iii)もまた満たされ，そして第Ｉ段階は完了するであろう．

C. N. F. に対する手続と D. N. F. に対する手続は，この点からあと分岐する．従ってそれぞれを別個に述べることにする．

第Ⅱ段階（a）(C. N. F. へと続く)．第Ｉ段階の終りにおいて既に C. N. F. がえられたのでないならば，C. N. F. の定義から明らかなように，その理由はただひとつしかありえない．すなわち，１つまたはそれ以上の個所において，‘v’の現われるある個所に従属するところの‘&’の現われる個所があるはずである．なぜならば，そうでないとするならば，第Ｉ段階の条件(i)—(iii)

があれば，実際上 C. N. F. がえられるのでなければならない．故に（これは選言項のならべかえを必要とするかもしれないが）与えられた式のある部分は

$$\cdots\cdots\cdots \mathrm{v}\ (\cdots\cdots\cdots \& \cdots\cdots\cdots)$$

のかたちをしている．(12)を用いることによって，これはつぎのかたちの式によって置き換えることができる．

$$(\cdots\cdots\cdots \mathrm{v} \cdots\cdots\cdots)\ \&\ (\cdots\cdots\cdots \mathrm{v} \cdots\cdots\cdots).$$

ここで‘v’は従属的な位置へ移され，‘&’は従属させる位置へ移されている．もちろん，この新しい‘&’はまだ何か他の‘v’の現われる個所に従属しているかも知れない．しかしその場合には，われわれは同じ手続を繰り返し適用することができる．最終的には同値関係(12)あるいはその代入例のみを用いて，すべての‘&’を，従属させる位置へともたらし，そしてすべての‘v’を従属的位置へと追いやることができる．そのようにしてえられる結果は C. N. F. であろう．（C. N. F. のすべての連言項が基本的選言であるであろうということは，どのようにして確かめることができるか．）

第Ⅱ段階（b）（D. N. F. へと続く）．全く同様の考察によって，第Ⅰ段階の結果が既に D. N. F. でないならば，そのなかには‘&’に従属する‘v’の現われる個所が少なくとも1つなければならない．故にそれのある部分は，恐らく連言項をならべかえたあとで，つぎのかたちとなる．

$$\cdots\cdots\cdots \&\ (\cdots\cdots\cdots \mathrm{v} \cdots\cdots\cdots).$$

(13)を用いて，これはつぎのかたちの式に置き換えることができる．

$$(\cdots\cdots\cdots \& \cdots\cdots\cdots)\ \mathrm{v}\ (\cdots\cdots\cdots \& \cdots\cdots\cdots).$$

そしてこの種の手続を繰り返すことによって，すべての‘v’を，従属させる位置へもたらし，そしてすべての‘&’を従属的位置へ追いやることができる．そのようにしてえられる結果は D. N. F. であろう．

これらの手続を，中程度に複雑な wff に対して例示してみよう．

(i)　$S \to -((P \to Q) \to R).$

第Ⅰ段階に着手して，3つの条件法を選言に変形するために(8)を適用する．こうして

(ii)　$-S \vee -(-(-P \vee Q) \vee R)$,

がえられる．これは第Ⅰ段階の第2の条件を満たすが，なお2つの，括弧の外側の‘$-$’がある．第2の選言項へ(11)を適用して

(iii)　$-S \vee (--(-P \vee Q) \& -R)$

がえられ，また二重否定を除去してつぎの式がえられる．

(iv)　$-S \vee ((-P \vee Q) \& -R)$.

第Ⅰ段階はここに明らかに完了した．しかし結果は C.N.F. でも D.N.F. でもない．故に，第Ⅱ段階(a)に着手する．(iv)において，‘&’の現われるただ1つの個所は，主結合記号‘v’に従属していることに注意しよう．それ故，(12)を(iv)の全体に適用して，

(v)　$(-S \vee (-P \vee Q)) \& (-S \vee -R)$

がえられる．(v)の第1の連言項のなかでは括弧は(6)によって不用である．そこで C.N.F. としてつぎの式がえられる．

(vi)　$(-S \vee -P \vee Q) \& (-S \vee -R)$.

さてわれわれは (iv) に戻って，第Ⅱ段階(b)をはじめる．(iv) の第1の選言項‘$-S$’はもちろんわれわれの求める D.N.F. に対する e.c. として十分である．そこでもっぱら，‘&’に従属する‘v’に集中する必要がある．連言項をならべかえると

(vii)　$-S \vee (-R \& (-P \vee Q))$

がえられ，ここから，第2の選言項に(13)を適用してつぎの結果がえられる．

(viii)　$-S \vee ((-R \& -P) \vee (-R \& Q))$.

これは実際上 D.N.F. である．そして一対の括弧を除去すればつぎの結果がえられる．

(ix)　$-S \vee (-R \& -P) \vee (-R \& Q)$.

実際にやってみると，第Ⅱ段階の方が，含まれている原理は大へん簡単で

はあるが，厄介なのが普通である．これは，分配律の適用の結果，括弧の数が倍加するからであって，その結果えられる式は，もとの式のほとんど2倍の長さになるであろう．標準形を作ろうとする学生諸君はこのために意気阻喪することがあってはならないし，また式に括弧をつけることに綿密な注意をはらうことを怠ってはならぬ．またつぎのことを覚えておくべきである．すなわち，第Ⅱ段階にあっては，‘v’または‘&’が従属的に現われる幾つかの個所があるのに対して，どこから手を着けるかに関して，しばしば選択の余地がある．その結果，もとの同じ wff に対して，違った C.N.F.'s および D.N.F.'s がえられるかも知れない——与えられた wff に対して，ただ1つの C.N.F. または D.N.F. が存在するのではない．

C.N.F. および D.N.F. をある用途にあてるために，われわれはまず幾つかの明白な同値関係を述べておく．Tを任意のトートロジー，Ｉを任意の不整合な式としよう．その場合にはつぎの式はトートロジーである．

(14)　$\mathrm{T} \vee P \longleftrightarrow \mathrm{T}$

(15)　$\mathrm{T} \,\&\, P \longleftrightarrow P$

(16)　$\mathrm{I} \vee P \longleftrightarrow P$

(17)　$\mathrm{I} \,\&\, P \longleftrightarrow \mathrm{I}$．

(14)により，トートロジー的な選言項との選言はそれ自身トートロジーであり，また(17)により，不整合な連言項との連言はそれ自身不整合な式である．(15)により，トートロジー的な連言項との連言はもうひとつの連言項に同値であり（従って，真理表による評価に関する限りでは，前者の連言項は除かれてもよい），また(16)により，不整合な選言項との選言はもうひとつの選言項に同値である（従って，真理表による評価に関する限りでは，前者の選言項は除かれてもよい）．

(15)から，（α）複合的連言は，その連言項のそれぞれがトートロジー的であるときまたそのときに限ってトートロジー的である，ということが帰結し，また(16)から，（β）複合的選言は，その選言項のそれぞれが不整合であると

きまたそのときに限って不整合である，ということが帰結する．（α）から，基本的連言は，いかなるアトムもトートロジー的ではありえないから，決してトートロジー的ではありえないことが帰結する．同様に，いかなる基本的選言も不整合ではありえない．しかしながら，つぎのことが確立されうる．

（γ）e.d. は，その構成要素であるアトムのなかに，命題変数とその同じ変数の否定を含むときまたそのときに限って，トートロジー的である．なぜならば，e.d. が実際に変数，たとえば‘P’を含み，またその変数の否定‘$-P$’をも含んでいるとしよう．すると，必要ならばアトムのならべかえをすることによって，それをつぎの形式に直すことができる．

$$P \vee -P \vee \cdots\cdots.$$

それ故に，(14)によって，それはトートロジー的である．逆に，それがアトムとして，任意の変数と，その同じ変数の否定とを同時に含まないならば，それぞれのアトムを偽にし（つまり，否定されて現われる変数には値T，そして否定されないで現われる変数には値Fを対応させる），従って全体の e.d. を偽にする付値を見出すことができる．同様に，(17)を用いて，つぎのことを示すことができる．

（δ）e.c. は，その構成要素であるアトムのなかに，命題変数とその同じ変数の否定を含むときまたそのときに限って，不整合である．

（α）と（γ）から，C.N.F. は，そのすべての e.d. がトートロジー的であるときまたそのときに限って，すなわち，そのなかに含まれているすべての e.d. が，その構成要素であるアトムのなかに命題変数とその同じ変数の否定を含むときまたそのときに限って，トートロジー的である，ということが推論される．すなわちわれわれは，wff の C.N.F. から，それがトートロジー的であるか否かを「読みとる」ことができる．たとえば，上の(vi)から，(vi)はある変数とその同じ変数の否定を含まない少なくとも1つの e.d. をもっている故に（実際上，この場合には両方の e.d. がそのようになっている），(i)はトートロジー的でない，と推論することができる．

同様に，（β）と（δ）から，D. N. F. は，そのすべての e.c. が不整合であるときまたそのときに限って，すなわち，そのなかに含まれているすべての e.c. がその構成要素であるアトムのなかに命題変数とその同じ変数の否定を含むときまたそのときに限って，不整合である，ということが推論される．たとえば，上の(ix)から，(ix)はある変数とその同じ変数の否定を含まない少なくとも1つの e.c. をもっている故に，(i)は不整合ではない，と推論することができる．実際，(i)はトートロジー的でもないし不整合でもないのであるから，偶然的であると，ここでわれわれは結論することができる．(vi)の第2の連言項を考えてみると，S=T，R=T なる付値によって，(i)は偽になることが知られる．また，(ix)の第1の選言項を考えてみると，S=F なる付値によって，(i)は真になることが知られる．一般に，任意の wff に対して，それに同値な任意の C. N. F. から，その wff がトートロジー的であるか否かを，また，それに同値な任意の D. N. F. から，その wff が不整合であるか否かを，きわめて簡単に知ることができる．それ故，C. N. F. および D. N. F. への還元は，wff がトートロジー的であるか偶然的であるか不整合であるかについての，真理表テストからは独立のテストができるようにする．標準形への還元は，真理表テストの手間をわれわれのために省いてくれるであろう――違った種類の手間をかけて．

時として正準 (canonical) とよばれる，特殊な種類の標準形にはある興味がもたれる．正準連言標準形（C. C. N. F.）とは，ある e.d. のなかに（否定されてあるいは否定されないで）現われるすべての命題変数が，その C. N. F. のなかのすべての e.d. において（否定されてあるいは否定されないで）現われるような C. N. F. のことである．それに対応して，正準選言標準形 (C. D. N. F.) とは，ある e.c. のなかに（否定されてあるいは否定されないで）現われるすべての命題変数が，その D. N. F. のなかのすべての e.c. において（否定されてあるいは否定されないで）現われるような D. N. F. のことである．たとえば，上の例(vi)は正準ではない．なぜならば‘R’は第2

の e.d. には現われるが第1の e.d. には現われないからである．また(ix)は正準ではない．なぜならば，‘S’は第2の e.c. にも第3の e.c. にも現われないからである．他方

$$‘(P \vee -Q \vee -R) \& (Q \vee -P \vee R)’$$

は C.C.N.F. である．そしてそのなかにおいて‘&’と‘v’を交換すると C.D.N.F. がえられる．

非正準的標準形から正準的標準形をうるためには，まず第1につぎの2つの同値関係に注意する．

(18)　$P \longleftrightarrow (P \vee Q) \& (P \vee -Q)$

(19)　$P \longleftrightarrow (P \& Q) \vee (P \& -Q)$.

さて，与えられた C.N.F. が C.C.N.F. でないならば，与えられた標準形のなかのある e.d. には現われるが，その標準形のすべての e.d. のなかには現われない，ある変数が存在しなければならない．われわれは(18)を用いて，与えられた変数を含まない任意の e.d. を，与えられた e.d. の他のアトムとともにその変数をもそれぞれに含んでいるような，e.d. のペアによって置き換えることができるであろう．そしてそのペアのひとつの元においては，その変数は否定されないで現われ，またもうひとつの元においては否定されて現われることになる．たとえば，(vi)を C.C.N.F. に変形したいとすれば，第1の連言項を(18)によってそれに同値な

$$‘(-S \vee -P \vee Q \vee R) \& (-S \vee -P \vee Q \vee -R)’$$

によって置き換えるべきである．こうして(vi)の4つの変数がすべて現われるような，2つの e.d. がえられる．（そこで(vi)の第2の連言項を，4つの変数のすべてを含む e.d. に変形する仕事が残るであろう．）このようにして，(18)を繰り返し用いることによって，正準でない C.N.F. は，それに同値な C.C.N.F. に変形されるであろう．全く同様の方法で，(19)を用いて，正準でない任意の D.N.F. を C.D.N.F. に変形することができる．

正準標準形が与えられると，それをつぎのようにして単純化できる．(i)

その標準形のなかの任意の e.d. または e.c. に現われるアトムの繰り返しはすべて除去する. (ii) その標準形のなかの e.d. または e.c. の繰り返しはすべて除去する. (iii) C.N.F. の場合には, (15) によって, すべてのトートロジー的な e.d. を除去し, また D.N.F. の場合には, (16) によって, すべての不整合な e.c. を除去する. (iii) によって, 標準形がすっかり消失するかも知れない. そして C.N.F. がトートロジー的であるか, あるいは D.N.F. が不整合であるならば, それでよいのである. その場合には, それぞれ, '$P \vee -P$' および '$P \& -P$' と書くことに決める. これらの操作を加えた結果を特別 (distinguished)（連言または選言）標準形とよぼう. すると, すべての wff に対して, その特別（連言または選言）標準形は, e.d. あるいは e.c. におけるアトムの順序, および e.d. あるいは e.c. そのものの順序における変化を別とすれば, 一意的であることが示されうる. その上, これらの標準形は, 真理表が特別連言標準形および特別選言標準形のいずれからも読みとれ, またこれらの標準形は真理表から読みとれるという点で, 与えられた wff の真理表に対して密接な関係をもっている.

これは恐らく例によって示すのが最もよいであろう. wff A が3つの変数 'P', 'Q', 'R' を含み, 真理表に書くとその主結合記号の下につぎのような列がえられると仮定しよう.

P	Q	R	A
T	T	T	T
T	T	F	F
T	F	T	F
T	F	F	T
F	T	T	F
F	T	F	T
F	F	T	F
F	F	F	F

Aが真となる付値を選び, それに対応する, 変数が付値において値Tをとるならば否定されないで現われ, 値Fをとるならば否定されて現われるような,

e.c. を書き出すことができるであろう．こうして，上の表の第1，第4，および第6番目の行に対応して，つぎの e.c. がえられる．

$$`(P \ \& \ Q \ \& \ R)'$$
$$`(P \ \& \ -Q \ \& \ -R)'$$
$$`(-P \ \& \ Q \ \& \ -R)'.$$

これら3つの選言を作ると，特別 D.N.F. がえられるが，これが与えられた wff A に同値であることは，かなり明白である．逆に，ある wff に対する特別 D.N.F. が与えられるならば，そのなかのすべての e.c. は，その wff を真ならしめるその変数への付値を決定する．そこでその wff に対する真理表を書くことができる．こうして，wff の特別 D.N.F. は，その wff に対する真理表テストの結果を，記号的な形式によって定式化しているのである．

同様のことは，特別 C.N.F. についても言うことができる．上の例を引き続き用いるならば，Aが偽となるそれぞれの付値に対応して，変数が付値において値Tをとるならば否定されて現われ，値Fをとるならば否定されないで現われるような，e.d. を書き出すことができるであろう．こうして，真理表テストの第2，第3，第5，第7および第8番目の行に対応して，つぎの e.d. がえられる．

$$`-P \vee -Q \vee R'$$
$$`-P \vee Q \vee -R'$$
$$`P \vee -Q \vee -R'$$
$$`P \vee Q \vee -R'$$
$$`P \vee Q \vee R'.$$

これらの連言を作ると，特別 C.N.F. がえられるが，これは与えられた wff に同値である（読者はこれを自分でテストしてみるべきである）．逆に，ある wff に対する特別 C.N.F. が与えられるならば，そのなかのすべての e.d. は，その wff を偽ならしめるその変数への付値を決定する．そこでその wff

に対する真理表を書くことができる．特別 C. N. F. は，特別 D. N. F. と同様，真理表テストの記号的定式化である．

学生諸君にはつぎのことを指摘してこそ公平というものである．もしただ与えられた wff に同値な標準形をうることが要求されているだけならば，最も早い方法は，通常は，真理表テストを行なって，それから標準形を読みとることである．この付録に記述された，標準形をうるためのめんどうな手続のもつ唯一の長所は，それがそのようなテストからは独立であるというところにある．

付録B　初等的クラスの理論

この付録は，この書物の範囲を越えてさらに論理学を研究して行くならば，恐らくどのようなものに出会うことになるかを，読者に予想して貰おうとするものである．そこに含まれていることがとくに難かしいというわけではない．実際，その第1の段階においては，クラスの理論は命題計算よりも難かしいものではなく，また以下に見られる通り，それに密接な類似性をもっている．しかしその上の方の段階では，それは，この書物を書いている時点においてはまだ解決されない，数学基礎論に関する非常に興味のある問題を提起するものである．

クラスとは何かについての正確な定義を与えることはできない．直観的には，クラスとは任意の種類のものの集まりである．そしてわれわれはクラスを，典型的には，2つの方法のいずれかで知ることになる．すなわち，そのクラスの元 (members) のリストが与えられることによってか，あるいはそのクラスの元に対する条件が与えられることによってか，である．この2つの方法を順に考察しよう．

たとえば，トム，ディック，そしてハリーといった，もののリストが与えられたとすると，ちょうどそれらのものを元としてもつクラスを考えることができるであろう．このクラスを，リストの名前を中括弧によって囲むことによって名指すことにしよう．こうして

{トム，ディック，ハリー}

を，元がただトム，ディック，ハリーのみであるクラスに対する名前としよう．同様に，{0，1，2，3，4，5，6，7，8，9} を，元が最初の10個の自然数であるクラスとしよう．「の元である」(is a member of) を省略してギリ

シア文字‘ε’を用いるのが普通である．そこで真なる命題としてつぎのようなものが挙げられるであろう．

ディック ε {トム，ディック，ハリー}

3 ε {0，1，2，3，4，5}

3+3 ε {6，7，8，9}．

しかしながら，より普通には，クラスの元であるための条件を述べることによって，クラスが決定される．たとえばわれわれは，ロンドンの住民のクラス，偶数のクラス，足治療を専門とする女医のクラス，等々について語るのである．われわれがクラスを記述するこの方法を用いるのは，その元を名前によって列挙するのが不便な場合（ロンドンの住民のクラス），あるいはそうすることが理論的に不可能な場合（偶数のクラス．これは大きさが無限である）である．述語計算におけると同様に，変数‘x’，‘y’，‘z’の記号を用いて，………x………であるような対象xのクラスを表わす名前として，つぎの記法を採用してよいであろう．

‘{x :………x………}’．

たとえば，{x : xはロンドンに住んでいる}は，ロンドンの住民のクラスであり，{x : xは偶数である}は，偶数のクラスであろう．そこで真なる命題としてつぎのようなものが挙げられるであろう．

エリザベスⅡ世 ε {x : xはロンドンに住んでいる}

256 ε {x : xは偶数である}．

より一般的に言えば，任意の性質Fはクラスを，すなわち，性質Fをもつもののクラスすなわち{x : Fx}を決定するであろう．そして，任意に選ばれた対象aは，性質Fをもつときまたそのときに限って，このクラスの元であるであろう．記号で書くと，

(P1)　$a \, \varepsilon \, \{x{:}Fx\} \longleftrightarrow Fa.$

(P1)は，クラスの元であること (membership) に関するわれわれの第1の基本的原理である．その真理を疑うことは難かしいと思われる．しかし，わ

れわれはこの付録の目的に従ってそれを受けいれるであろうけれども，それは，少なくとも十分に一般的な意味においては，受けいれられないとする理由が，この付録の終りに概観されるであろう．

クラスの同一性を成り立たせるものは何であろうか．たとえば，偶数のクラスは２で割り切れる数のクラスと同じであると，また {2, 3, 5, 7} というクラスは10より小なる素数のクラスと同じであると，言うことにしたいのである．クラスは正確に同じ元をもつならば，すなわち，前者の元である任意の対象が後者の元であり，また逆も真であるならば，同一である．この原理をより正確に述べるために，われわれはクラス変数 (class-variables) としてギリシア文字 'α', 'β', 'γ',………を採用し，その変域は，あたかも代数学において数的変数が，数に限られた変域をもつと了解されるように，クラスに限られるものと了解する．その場合には，われわれの第２のクラスに関する原理はつぎのように定式化される．

$$\text{(P2)}\quad (x)(x\varepsilon\alpha \longleftrightarrow x\varepsilon\beta)\rightarrow\alpha=\beta.$$

対象がβの元であるときまたそのときに限ってαの元であるならば，すなわちαとβが正確に同じ元をもつならば，（P2）によりαとβは同一である．

（P1）と（P2）の用途は，それからきわめてトリヴィアルな結果を証明することによって例示することができるであろう．

200　$\vdash \{x\colon x\varepsilon\alpha\}=\alpha.$

200 は，αの元であるもののクラスはαにほかならないことを主張するに過ぎない．証明は容易である．（P1）の特定の場合として，'Fx' を '$x\varepsilon\alpha$' と考えると，

$$(1)\quad a\varepsilon\{x\colon x\varepsilon\alpha\}\longleftrightarrow a\varepsilon\alpha$$

がえられる．(1)は，対象は，αの元であるときまたそのときに限って $\{x\colon x\varepsilon\alpha\}$ の元であること，すなわち，２つのクラスが正確に同じ元をもつことを主張する．故に，（P2）により，'α' を $\{x\colon x\varepsilon\alpha\}$，また '$\beta$' を$\alpha$と考えて，われわれは２つのクラスの同一性を結論する．これが 200 の結果である．暗黙

のうちに，われわれはここで(1)に対して UI を適用し，つづいて（P2）の代入例を合わせ用いて MPP を適用している．この付録におけるわれわれの証明は，一般にこの程度の非形式的なレベルにおいて行なわれるであろう．

クラスに対するある演算は非常に重要である．ここにはわれわれは3つの最も基本的なものを導入する．第1は，2つのクラス α と β が与えられるならば，α と β の合併クラス（union）を，α の元であるかあるいは β の元であるかであるもののクラスとして定義できるであろう．たとえば，α が {1, 2, 3} であり，そして β が {2, 3, 4} であるならば，α と β の合併クラスは {1, 2, 3, 4} である．あるいは，α がイギリス人のクラスであり，そして β が医者のクラスであるならば，α と β の合併クラスは，イギリス人であるかあるいは医者であるかである（イギリス人の医者を包含する）ひとびとのクラスである．'v' を思い起こさせる記号を用いて，α と β の合併クラスを '$\alpha\cup\beta$' と書く．形式的な定義はつぎの通りである．

$$Df. \cup\colon \alpha\cup\beta=\{x\colon x\varepsilon\alpha \vee x\varepsilon\beta\}.$$

（P1）による，この定義の直接の帰結は（'Fx' を '$x\varepsilon\alpha \vee x\varepsilon\beta$' と解釈して），つぎの通りである．

201　$\vdash a\varepsilon\alpha\cup\beta \longleftrightarrow a\varepsilon\alpha \vee a\varepsilon\beta$.

合併クラスに関しては，つぎの結果が成り立つ．

202　$\vdash \alpha\cup\beta=\beta\cup\alpha$;

203　$\vdash (\alpha\cup\beta)\cup\gamma=\alpha\cup(\beta\cup\gamma)$;

204　$\vdash \alpha\cup\alpha=\alpha$.

これらのうち，202 のみを証明する．203 と 204 の証明は全く同様である．201 により，

(2)　$a\varepsilon\alpha\cup\beta \longleftrightarrow a\varepsilon\alpha \vee a\varepsilon\beta$

(3)　$\longleftrightarrow a\varepsilon\beta \vee a\varepsilon\alpha$

(4)　$\longleftrightarrow a\varepsilon\beta\cup\alpha$.

(3)の行は(2)の行から命題計算の初等的推論によって帰結し，(4)の行は(3)の行

から，'α' をβと考え，'β' をαと考えて，201 を適用することによって帰結する．相互条件法を「積み重ねる」方法は説明するまでもなかろう．(4)により，$\alpha\cup\beta$と$\beta\cup\alpha$は正確に同じ元をもつ故，それらは（P2）によって同一である．

第2に，2つのクラスαとβが与えられるならば，αとβの共通部分 (intersection) を，αの元であると同時にβの元でもあるもののクラスとして定義する．たとえば，αが $\{1, 2, 3\}$ であり，そしてβが $\{2, 3, 4\}$ であるならば，αとβの共通部分は $\{2, 3\}$ である．あるいは，αがイギリス人のクラスであり，そしてβが医者のクラスであるならば，αとβの共通部分はイギリス人の医者のクラスである．われわれはαとβの共通部分を$\alpha\cap\beta$と書く．こうして，

$$Df.\cap:\ \alpha\cap\beta=\{x:\ x\varepsilon\alpha\ \&\ x\varepsilon\beta\}.$$

直接の帰結として（P1）により，

205　$\vdash a\varepsilon\alpha\cap\beta\longleftrightarrow a\varepsilon\alpha\ \&\ a\varepsilon\beta,$

がえられ，そして 202–204 に類似した結果が，これまたきわめて容易に証明される．

206　$\vdash \alpha\cap\beta=\beta\cap\alpha;$

207　$\vdash (\alpha\cap\beta)\cap\gamma=\alpha\cap(\beta\cap\gamma);$

208　$\vdash \alpha\cap\alpha=\alpha.$

202–204 と 206–208 に照らして，クラスの合併クラスと共通部分は，付録Aの術語によって言えば，可換的，結合的，冪等的である．

第3に，任意のクラスαに対して，その補クラス (complement) を，αの元でないもののクラスとして定義する．言うまでもないことであるが，クラスの理論の解釈においても，述語計算の場合と同様に，つねにわれわれは固定した話の世界を念頭におく．そしてあるクラスの補クラスはその世界に相対的なものである．たとえば，正の整数の世界が与えられたならば，偶数のクラスの補クラスは奇数のクラスである（また逆も真である）．そして人間の

世界が与えられたならば，男のクラスの補クラスは女のクラスである（また逆も真である）．自然数の世界が与えられたならば，クラス {0, 1, 2} の補クラスは2より大なる数のクラスである．われわれは α の補クラスを '$\alpha^{|}$' によって表わす．こうして，

$$Df.^{|}: \alpha^{|} = \{x: -(x\varepsilon\alpha)\}.$$

この定義の（P1）による直接の帰結はつぎの通りである．

209　$\vdash a\varepsilon\alpha^{|} \longleftrightarrow -(a\varepsilon\alpha)$.

クラスに対する二重否定律はつぎのかたちでえられる．

210　$\vdash \alpha^{||} = \alpha$.

クラスの合併クラス，共通部分，補クラスは，ド・モルガン律に類似したいろいろの結果によって，互いに関連し合う．ここにはひとつのみを述べ，証明しておく．読者は他のものを，欲するならば，独力で定式化し証明しうるのでなければならない．

211　$\vdash (\alpha\cap\beta)^{|} = \alpha^{|}\cup\beta^{|}$.

209 によって，

$$\begin{aligned}
&(5)\quad a\varepsilon(\alpha\cap\beta)^{|} \longleftrightarrow -(a\varepsilon\alpha\cap\beta)\\
&(6)\quad \longleftrightarrow -(a\varepsilon\alpha \ \& \ a\varepsilon\beta)\\
&(7)\quad \longleftrightarrow -(a\varepsilon\alpha) \vee -(a\varepsilon\beta)\\
&(8)\quad \longleftrightarrow a\varepsilon\alpha^{|} \vee a\varepsilon\beta^{|}\\
&(9)\quad \longleftrightarrow a\varepsilon\alpha^{|}\cup\beta^{|}.
\end{aligned}$$

ここで(6)は(5)から 205 によって，(7)は(6)から命題計算の推論によって，(8)は(7)からふたたび 209 によって，(9)は(8)から 201 によって帰結する．211 はそこで（P2）によって帰結する．なぜならば，$(\alpha\cap\beta)^{|}$ と $\alpha^{|}\cup\beta^{|}$ は正確に同じ元をもつことが示されたのだからである．

これまでわれわれは，非形式的にクラスを指示するものとして，列挙した名前を中括弧で囲んだものを用いてきた．しかしクラスの元であるための条件が与えられるならば，この中括弧の用法を，われわれの他の中括弧の用法

によって定義することにより，形式的に導入することが可能である．たとえば，｛トム，ディック｝は，その元がトムであるかあるいはディックであるようなクラスとして定義されてよいであろう．一般につぎのように書けるであろう．

$$\{a,\ b\}=\{x\colon x=a \vee x=b\}.$$

従って，$\{a,\ b\}$ は，元がただ a と b のみのクラス，すなわち，a であるかあるいは b であるかであるもののクラスであろう．$\{a,\ b\}$ の元であることは，a であるかあるいは b であるかであることである．すなわち，

212　$\vdash c\varepsilon\{a,b\}\longleftrightarrow c=a \vee c=b.$

われわれは $\{a,\ b\}$ を a と b の対(ツイ)クラス (pair class) とよぶことができよう．a と b のいずれも 212 の右辺を満たす故，明らかにつぎの結果がえられる．

213　$\vdash a\varepsilon\{a,b\}\ \&\ b\varepsilon\{a,b\}.$

この方法は，明らかに 3 つあるいはそれ以上の元をもつクラスへも拡張されうる．それはまた他の方向へ，正確に 1 つの元をもつクラスへも，拡張されうる．こうして $\{a\}$ はその唯一の元が a であるクラスであろう．われわれは

$$\{a\}=\{x\colon x=a\}$$

と定義できるであろう．そこでつぎのことが帰結するであろう．

214　$\vdash b\varepsilon\{a\}\longleftrightarrow b=a$

215　$\vdash a\varepsilon\{a\}.$

$\{a\}$ は a の単位クラス (unit class) とよばれてよいであろう．a の単位クラスは a 自身と同じではない．われわれはのちに，この 2 つを区別することが重要なことを知るであろう．

クラスの元であるための条件が述べられる場合に，その条件を満たすものが存在しないことが判明するということがあるかも知れない．このような場合には，そのクラスのことをどのように言えばよいであろうか．たとえば，$\{x: x$ はユニコーンである$\}$，すなわちユニコーンのクラスについてはどう

であろうか．あるいは一般に，$(x)-Fx$ である場合に，$\{x: Fx\}$ についてはどうであろうか．このような場合には，そのクラスが存在することを認め，これを空（empty）であるとよぶのが，理論的に最も単純であることがわかる．ユニコーンは存在しない．しかしユニコーンのクラスは存在する．そしてユニコーンが存在しないと言うための，正確に1つの方法は，このクラスが空であると言うことである．

任意の2つの空クラスは同一であるということは，（P2）の（恐らくは驚くべき）帰結である．なぜならば，2つのクラスは，正確に同じ元をもつならば，すなわち，一方の元であって他方の元でないものが存在しないならば，同一である．しかし2つのクラスが空であるならば，どちらの元も存在しないのであるから，一方の元であって他方の元でないものは存在しない．故に，それらは同一である．もう少し形式的に書くと，

216　$(x)-(x\varepsilon\alpha)$，$(x)-(x\varepsilon\beta)\vdash(x)(x\varepsilon\alpha\longleftrightarrow x\varepsilon\beta)$．

この連式は述語計算の規則を用いてきわめて簡単に証明されうる．そして明らかに 133，すなわち形式的含意のパラドックスのひとつに，関係がある．従って（P2）により，

217　$(x)-(x\varepsilon\alpha)$，$(x)-(x\varepsilon\beta)\vdash\alpha=\beta$.

217 によって，われわれは空クラス（empty class あるいはより普通の言い方では null class）について語ってよいことになるであろう．われわれはそれを 'Λ' によって指示するであろう．また，いかなるものによっても満たされないと知られている任意の条件，たとえばそれ自身と同一でないという条件，を述べることによって，それを定義することができるであろう．従って

$$\Lambda=\{x: x\neq x\}.$$

空クラスは，x が x 自身と同一でないような x のクラスのことである．論理学の問題として，$(x)(x=x)$ なのであるから，（P1）によってつぎのことが容易に証明される．

218　$\vdash(x)-(x\varepsilon\Lambda)$．

クラスとそれ自身の補クラスの共通部分は，予期される通り，空である．そこでつぎのことが証明できる．

219　$\vdash \alpha \cap \alpha' = \Lambda$.

なぜならば，$a\varepsilon\alpha\cap\alpha'$ と仮定してみよう．すると 205 によって，$a\varepsilon\alpha \,\&\, a\varepsilon\alpha'$ であり，このことから 209 によって，$a\varepsilon\alpha \,\&\, -(a\varepsilon\alpha)$．これは矛盾である．故に $(x)-(x\varepsilon\alpha\cap\alpha')$．このことから，219 が 217 と 218 から帰結する．

空クラスの補クラスは，すべてのものがその元であるようなクラスであることは明らかであろう．こうして，ある話の世界における任意の与えられた解釈に対して，それはその世界のなかのもののクラスであろう．われわれはそれを全クラス（universe class）とよび，‘V’によって指示し，つぎのように定義することができるであろう．

$$\mathrm{V}=\{x\colon x=x\}.$$

こうしてVとは，それ自身と同一なもののクラスのことである．そして論理学の問題として，$(x)(x=x)$ であるから，（P1）によってつぎのことが容易に証明される．

220　$\vdash (x)(x\varepsilon\mathrm{V})$.

（P2）によって，すべてのものを元とする任意の2つのクラスは同一であることは明らかでなければならない．つぎの結果がえられる．

221　$(x)(x\varepsilon\alpha)$，$(x)(x\varepsilon\beta) \vdash \alpha=\beta$.

220 と 221 を用いて，クラスとそれ自身の補クラスの合併クラスは，予期される通り，全クラスであることが示されうるであろう．

222　$\vdash \alpha \cup \alpha' = \mathrm{V}$.

2つのクラスの間に存在するであろう重要な関係は包含（inclusion）の関係である．クラスαは，そのすべての元がβの元であるならば，クラスβに包含される．そこでわれわれは‘$\alpha\subseteq\beta$’と書いて，つぎの定義を採用する．

$$Df.\subseteq\colon \alpha\subseteq\beta \longleftrightarrow (x)(x\varepsilon\alpha \longrightarrow x\varepsilon\beta).$$

包含関係は元であることの関係と注意ぶかく区別されねばならない．わたし

がチェルシーの住民であるとしよう．するとわたしはチェルシーの住民のクラスの元である．さらに，すべてのチェルシーの住民はロンドンの住民であるから，チェルシーの住民のクラスはロンドンの住民のクラスに包含される．それ故わたしはこの後者のクラスの元でもある．しかしチェルシーの住民のクラスはロンドンの住民のクラスの元ではない．そうであるとするならば，チェルシーの住民のクラスはロンドンの住民となるであろう．しかしクラスは，ひとびととは違って，いかなる場所の住民でもない．また，鯨のクラスは哺乳動物のクラスに包含される．しかしそれは哺乳動物のクラスの元ではない．なぜならば，鯨のクラスはクラスであって，鯨ではないからである．しかしながら，ルーファスが鯨であるならば，それは鯨のクラスの元であり，従って哺乳動物のクラスの元である．しかしルーファスはクラスではないから，哺乳動物のクラスに包含されるのではないこと，あたかもわたしがチェルシーに住んでいるならば，ロンドンの住民のクラスの元ではあるけれども，そのクラスに包含されるのではないのと同じことである．

それ故，対象をそれらの単位クラスから区別することが重要になってくる．なぜならば，わたしがチェルシーの住民のクラスの元であるならば，わたしの単位クラスのすべての元（この場合はただひとつのみ）はそのクラスの元であるから，わたしの単位クラスはそのクラスに包含されるからである．実際，つぎの結果がえられる．

223　$\vdash a\varepsilon\alpha \longleftrightarrow \{a\}\subseteq\alpha$.

対象は，その単位クラスがあるクラスに包含されるときまたそのときに限って，そのクラスの元である．包含はクラスの間の関係である．元であることは（典型的な場合について言えば）個体とクラスの間の関係である[1]．

包含関係の特性の，明瞭な部類に属するものは，つぎの定理において与えられている．これらは一般に，包含関係の定義から直ちに帰結する．

224　$\vdash \alpha\subseteq\alpha$;

225　$\vdash \alpha\subseteq\beta\ \&\ \beta\subseteq\gamma \rightarrow \alpha\subseteq\gamma$;

226 $\vdash \alpha \subseteq \beta \rightarrow \beta' \subseteq \alpha'$;

227 $\vdash \Lambda \subseteq \alpha$;

228 $\vdash \alpha \subseteq \mathrm{V}$.

224–226 は，ある意味では，透いて見える仮装をまとった述語計算の定理である．たとえば，省略せずに書くと，224 は同一律 $(x)(x\varepsilon\alpha \rightarrow x\varepsilon\alpha)$ に過ぎない．同様に，227 と 228（空クラスは任意のクラスに包含され，また任意のクラスは全クラスに包含される）は，形式的含意のパラドックス 133 と 132 のクラス理論における類似定理である．証明がもう少し難かしいのはつぎのような定理である．

229 $\vdash \alpha \subseteq \beta \ \& \ \beta \subseteq \alpha \longleftrightarrow \alpha = \beta$;

230 $\vdash \alpha \subseteq \beta \longleftrightarrow \alpha \cup \beta = \beta$;

231 $\vdash \alpha \subseteq \beta \longleftrightarrow \alpha \cap \beta = \alpha$.

231 の非形式的な証明を与えよう．第1に，$\alpha \subseteq \beta$ と仮定し，$a \ \varepsilon \ \alpha$ としよう．すると明らかに $a \ \varepsilon \ \beta$，従って，$a \ \varepsilon \ \alpha \cap \beta$．逆に $a \ \varepsilon \ \alpha \cap \beta$ ならば，いずれにしても $a \ \varepsilon \ \alpha$．従って，$a \ \varepsilon \ \alpha$ なるときまたそのときに限って $a \ \varepsilon \ \alpha \cap \beta$．このことから（P2）によって $\alpha \cap \beta = \alpha$．これによって左辺から右辺への条件法が証明された．つぎに，$\alpha \cap \beta = \alpha$ と仮定し，$a \ \varepsilon \ \alpha$ としよう．すると $a \ \varepsilon \ \alpha \cap \beta$．このことから $a \ \varepsilon \ \beta$．故に，α の任意の元は β の元である．従って $\alpha \subseteq \beta$．これによって右辺から左辺への条件法が証明され，231 の証明が完了した．

ここでは初等的クラスの理論をこれ以上展開することはしないであろう．しかし読者はこの理論と命題計算との間には多くの類似点（たとえば，231 をトートロジー‘$P \rightarrow Q \longleftrightarrow (P \ \& \ Q \longleftrightarrow P)$’と比較せよ）があることに気づかれたに相違なかろうし，またこの比較に基づいてクラスについての他の定理をも，望むならば考え出し，証明することができるであろう．あるいは読者は Suppes [25] について見られるならば，得るところが多いことであろう．わたしはむしろためらいながら話を終えようとしているのである．と

いうのは，われわれのクラスの理論は，直観的に受けいれられる仮定から出発して，大へん順調に進んできたようにみえるかも知れないが，われわれが無矛盾であってうまく行く体系を作りたいと思うならば，克服されねばならないある困難が存在するのだからである．

最初に，明らかに無害な 220 の結果，$(x)(x \varepsilon \mathrm{V})$ を考えてみよう．UE の帰結として，$\mathrm{V} \varepsilon \mathrm{V}$を認めるべきであろうか．全クラスが，われわれの定義したように，すべてのものが元であるクラスであるならば，それはそれ自身の元であろうか．恐らくわれわれはこのことを定理として認めるかも知れない[2]．しかしそれ自身を元としてもつクラスというものには，確かに直観的に何か奇妙なものがある．普通われわれの考えるすべてのクラスは，それ自身を元としないということは確かである．たとえば，鯨のクラスはそれ自身鯨ではないし，自然数のクラスはそれ自身自然数ではない．それ自身を元とするクラスが存在するか否かについての問題は，それ自身を元としないクラスのクラス，すなわち，中括弧を用いるわれわれの記法で書くと，

$$\{x: -(x \varepsilon x)\}$$

——xがx自身の元でないような対象xのクラス——を考えることにわれわれを導く．このクラスをRとよぶことにしよう．すると，既に見た通り，普通にわれわれが取り扱う大ていのクラスはRの元である．

（P1）により，Rの元であることの条件は，相互条件法

$$(10)\quad a \varepsilon \{x: -(x \varepsilon x)\} \longleftrightarrow -(a \varepsilon a),$$

あるいは

$$(11)\quad a \varepsilon R \longleftrightarrow -(a \varepsilon a)$$

によって与えられる．しかし(11)は任意の a に対して成り立つのである．それ故，aをRそのものと考えるならば，つぎの結果がえられる．

$$(12)\quad R \varepsilon R \longleftrightarrow -(R \varepsilon R).$$

(12)は直ちに矛盾に導く．この矛盾は最初にラッセルによって発見された．そこでそれ自身の元でないクラスのクラスを考えることによって導かれるパラ

ドックスは，ラッセルのパラドックス（Russell's paradox）として知られている．

（P1）に含まれていた矛盾(12)が，全く初等的な推論によって，（P1）から導かれたことを強調しておくことが重要である．そして近代的なクラスの理論はいずれも，その出発点として，ラッセルのパラドックスのようなパラドックスを回避するための何らかの方法を備えている，と言っても決して誇張ではない．ラッセル自身の解決法は，本質的には，'$a \varepsilon a$' のような表現を wff ではないとして除去し，そして，元であるという関係が成り立つと言うことに意味があるのは，その関係がひとつのレベルの対象とそのつぎに上のレベルのクラスとの間に成り立つときに限るという仕方で，クラスの階層秩序を発展させることであった．その結果えられた階型理論（theory of types）は，ある自然さをもってはいるが，実用上は扱いにくい難物である．他の理論においては，'$a \varepsilon a$' を wff として受けいれ（一般に，それは偽ではあるが），そして（P1）の右辺にさらに条件を加えることによって，パラドックスを回避する．しかしまた他の理論においては，（P1）の背景にある仮定，すなわち，すべての述語 'F' はクラス $\{x: Fx\}$ を決定するということ，を問題視することによって，ラッセルのパラドックスを避けようとしている．ラッセルのパラドックスを回避するための最善の，あるいは適切な方法については，論理学者の間にいまだ一般的な意見の一致は見られない．しかし少なくともひとつのことは明らかである．すなわち，（P1）は，その直観的な魅力とみかけ上の自明性にもかかわらず，そのままでは受けいれられない，ということである．直観に頼り過ぎることの危険について，汲み取るべき哲学的教訓もあるのかも知れない．しかしここはそれを汲むべき場所ではない．

注1）もちろんわれわれはクラスを元として含むクラスの可能性を排除するものではない。実際，そのようなクラスが認められないならば，高級なクラスの理論はほとんど興味のないものとなるであろう。

2）それは Quine [18] におけるクラスの理論の定理である。しかしそれは大ていのクラスの理論においてはしりぞけられている。

文献表

つぎの文献表は非常に精選されたものである．それは何よりも，より深く論理学の研究に入って行きたいと思っていて，しかもどこからはじめるべきかおぼつかない学生のために，出発点となろうと意図するものである．だからそれは，そのあとにつづく注とあわせ用いて頂きたい．注には，読者がこれから進めばよいであろうような，幾つかの可能な方向が示してある．書物のみがここには挙げられている．にもかかわらず，最近の論理学の仕事の非常に多くは，雑誌論文によって推進せしめられてきたのである．これらの論文をもれなく知ろうとこころざす学生は，「記号論理学雑誌」(*Journal of Symbolic Logic*) をしらべてみるべきである．これは1936年に，それまでの業績を網羅した文献表を掲載することによってはじまったが，その後，定期的に文献表を補充することによってこれを最新のものにし続けてきている．

[1] BASSON, A. H., and O'CONNOR, D. J., *Introduction to Logic* (2nd ed.), London, 1957.

[2] CHURCH, A., *Introduction to Mathematical Logic*, I, Princeton, 1956.

[3] COPI, I. M., *Symbolic Logic*, New York, 1954.

[4] FITCH, F. B., *Symbolic Logic*, New York, 1951.

[5] FREGE, G., *The Foundations of Arithmetic* (translated by J. L. Austin), Oxford, 1950.

[6] FREGE, G., *Translations from the Philosophical Writings of Gottlob Frege* by Peter Geach and Max Black, Oxford, 1952.

[7] HILBERT, D., and ACKERMANN, W., *Principles of Mathematical Logic*, New York, 1950.

[8] JOSEPH, H. W. B., *An introduction to Logic*, Oxford, 1906.

[9] KALISH, D., and MONTAGUE, R., *Logic: Techniques of Formal Reasoning*, New York, 1964.

[10] KLEENE, S. C., *Introduction to Metamathematics*, Princeton, 1952.

[11] KNEALE, WILLIAM and MARTHA, *The Development of Logic*, Oxford, 1962.

[12] LUKASIEWICZ, J., *Aristotle's Syllogistic* (2nd ed.), Oxford, 1957.

[13] MATES, B., *Stoic Logic*, Berkeley and Los Angeles, 1961.

[14] MATES, B., *Elementary Logic*, New York, 1965.

[15] MENDELSON, E., *Introduction to Mathematical Logic*, Princeton, 1964.

[16] PRIOR, A. N., *Formal Logic* (2nd ed.), Oxford, 1962.

[17] QUINE, W. V., *Methods of Logic*, New York, 1950, 1972[3], 1982[4].

[18] QUINE, W. V., *Mathematical Logic* (revised ed.), Cambridge, Mass., 1951.

[19] QUINE, W. V., *Set Theory and Its Logic*, Cambridge, Mass., 1963.

[20] ROSENBLOOM, P., *Elements of Mathematical Logic*, New York, 1950.

[21] RUSSELL, B., *Introduction to Mathematical Philosophy*, London, 1919.

[22] STEBBING, L. S., *A Modern Introduction to Logic*, London, 1930.

[23] STRAWSON, P. F., *Introduction to Logical Theory*, London, 1952.

[24] SUPPES, P., *Introduction to Logic*, Princeton, 1957.

[25] SUPPES, P., *Axiomatic Set Theory*, Princeton, 1960.

[26] TARSKI, A., *Logic, Semantics, Metamathematics* (papers from 1923 to 1938, translated by J. H. Woodger), Oxford, 1956.

[27] WHITEHEAD, A. N., and RUSSELL, B., *Principia Mathematica*, vols. I–III, Cambridge, 1910–13 ; abridged text of vol. I, Cambridge, 1962.

注

1. 本書のトピックと方法をさらに詳細に研究したいと思う学生は，[3]，[4]，[9]，[14]，[17]，[24]を読んでみるべきである．[24]が最も親しみがもてるように思われることであろう．そして[24]は多くの点において，わたしの取り扱いよりも遥かに先まで進んでいる．[4]は，そこに実際に用いられている導出規則に関して，本書に最も近い．[3]，[9]，および[24]には，このコースへの補足として用いられうる練習問題が豊富に入っている．[17]には真理表テストのうまい取り扱いが載っているが，わたし個人として

は，その量記号の規則は好きではない．[9]は最新のもので非常に正確ではあるが，すこし難かしい．[14]は近代的な論理学のテクニックの非常に完全で明快な概観である．

2．本書の立場とは異なった立場(たとえば自然演繹法によるアプローチよりはむしろ公理的なアプローチ）からの命題計算の研究に興味のある学生は，[1]，[7]，[16]を，あるいは，何よりもよいのは，[2]を読むことである．[2]は読み進むのに骨が折れるが，非常に包括的な取り扱いをしている．

3．他の立場からの述語計算の研究に興味のある学生は，[7]，[14]，[15]，[18]を試みるとよいであろう．ここでもまた，包括的な取り扱いは[2]にある．

4．伝統的論理学については，十分にやりたいなら[8]を，てぎわよくやりたいなら[22]を，最も新しくまた（大体において）正確であるものを望むなら[12]を用いるのがよい．[13]はストア派の論理学のすぐれた解説であるが，ストア派はフレーゲの哲学的理論のみならず，命題計算の多くの側面を先取していたのであった．

5．論理学史は恐らく[11]において最もよく研究されているだろう．[12]と[13]は，古代の論理学についての有益な補足となる．また，[16]の全体にわたって，興味のある歴史的注釈がある．[5]および[27]（特に序文の幾章か）は近代の古典である．

6．形式論理学に関連する哲学的諸問題に興味のあるむきは，[5]，[6]，[21]，および[23]を読むべきである．[2]の序章は，すべての哲学者が数回繰り返して読む価値がある．

7．クラスの理論については，[25]からはじめ，つぎに[18]と[19]を用いるのがよい．これらの書物には，それから先の研究の方法が示唆されている．

8．より高級な論理学の他の側面については，[10]は不可欠の文献ではあるが，数学の素養のないひとびとには難かしい．[15]もまた有益である——

幾つかの点では[10]よりも新しいが，[10]ほどには正確ではなく，それにまた非常に圧縮して書いてある（[10]はまた，クラスの理論についての有益な章を含んでいる）．[20]は数ページのうちにずいぶん先まで進む書物であるが，哲学者よりは数学者により多く訴えるであろう．[26]は両大戦の間の時期に，論理学においてどのような種類の仕事が進められたかを非常によくわからせてくれる書物である．そこに収録されている多くの論文は，現代の多くの仕事にとっての礎石である．近代論理学の幾つかの興味あるわき道（たとえば，多値論理学，様相論理学）については，[16]から始めるのがよい．これにはその先に読むべきものの有益な文献表が含まれている．

9．諸君がこのことに真剣であるのならば，他のどの書物にもまして，[2]と[10]を必要とするであろう．諸君にとって，数学的証明が難かしいと思われるならば，ペースを変えてみるがよい――証明をゆっくりそして数回繰り返して読むのである．最初はかなり大まかに読み，のちには諸君が確かに理解したと思うまではひとつの文もあとには残さないようにして読んで行く．もしこのやり方が助けになるなら，専門の数学者にとってもそれらの証明は難かしく思われるのだということを覚えておくのがよい．よい証明は，職業的なチェスの試合がファンによって味わわれるのとほぼ同じようにして味わわれることができる．そして同じような仕方で，知的歴史の断片を記録することになるのである．せっかちにとりかかってはいけない．

10．論理学のテキストをあけてみると，同じ演算に対してとりどりの異なった記号が用いられているのが見られる．そしてこれが次第に一様になって行きそうな気配はまずない．これはひとが折合って行くことを学ばねばならぬことがらである．

訳者注

上の文献表にあがっている書物のなかで，邦訳のあるものはつぎの通りである．

［7］ ヒルベルト・アッケルマン『記号論理学の基礎』（大阪教育図書，昭和49年）ただしこれは原書第6版の翻訳である．ちなみに，原書は第4版（1958）において徹底的な改訂を受け，第3版のおもかげはほとんど残っていない．英訳は第3版によっている．

［17］ クワイン『論理学の方法』(原書第3版)（岩波書店，昭和53年）

［19］ クワイン『集合論とその論理』（岩波書店，昭和43年）

［21］ ラッセル『数理哲学序説』（岩波文庫，昭和29年）

［23］ ストローソン『論理の基礎 上下』（法律文化社，昭和49・51年）

なお，［10］，［15］，［24］，および［25］にはリプリント版がある．

付録Bに関連して，本書の著者には公理的集合論の紹介があり，それには邦訳もあることを言い添えておく．

Lemmon, E. J., *Introduction to Axiomatic Set Theory*, London, 1968.（『公理的集合論入門』［東京図書，昭和47年］）

訳者あとがき

本書は E. J. Lemmon, *Beginning Logic* (London and Edinburgh: Nelson, 1965) の全訳である．原著者 Edward John Lemmon (1930–1966) はオックスフォード大学に哲学を学び，1957年同大学トリニティ・コレッジの研究員兼講師となった．1961年テキサス大学の客員教授として渡米し，1966年36歳の若さで世を去ったときには，カリフォルニア州の Claremont Graduate School において教えていた．かれの論理学者としての業績は様相論理学の研究を主とし，その初期の仕事に属するルイスの諸体系の reaxiomatizationは，この分野の研究者のあいだにはひろく知られているすぐれた仕事である．またレモンは，本書が捧げられている先輩の論理学者 Arthur Prior (ob. 1969) と同様，哲学や倫理学における論証の問題にも関心をもち，このような関心に基づいて，いわゆる "philosophical logic" の運動に寄与するところがあった．

初等論理学のテキストとしての本書の特徴や，またこれから論理学の勉強をはじめようとするひとたちへの一般的な助言のようなことは，本書の序文や巻末の文献表のあとにつけられた注に，かなり懇切に書いてあるので，ここであらためて述べることはしない．ただひとつ言い添えておきたいのは，このテキストを使って効果を挙げるためには，かなり沢山与えてある練習問題を，労を惜しまずに自分で解いてみるのが一番の近道であろうということである．

この翻訳は，いろいろの事情から，心ゆくまで推敲を加えることができない状態で印刷にまわさざるをえないことになった．もともと，ある高名な初等論理学のテキストの翻訳に，粗笨な校正の結果ともみられる欠陥の個所が

やたらと見うけられ，教室において使用するにあたって閉口したことがこの翻訳を思いたつに至った動機のひとつであってみれば，これはまことに皮肉な成行と言わざるをえない．さいわいにして大きな過誤のなからんことを祈るのみである．

原著は巻末に，本書の索引とは別に，本文に現われる各種の記号の索引をかねたリストを載せている．しかしこの程度のテキストの場合には，記号のリストがなくても不便はあるまいし，また索引と重複するものもあるので，この翻訳においては，出版社の希望をいれてリストを削除した．索引そのものも，原著のそれの煩雑をかなり整理してしまった．この翻訳の出版を引き受けられた世界思想社と，いろいろの面倒をみられた編集部の駒城鎮一氏に謝意を表する．

昭和48年　早春　　　竹 尾 治 一 郎 識

索　引

さ　行

な 行

は 行

ま 行

や 行

ら 行

訳者紹介

竹尾治一郎
昭和25年京都大学文学部卒業
現在　関西大学名誉教授

浅野楢英
昭和42年京都大学大学院博士課程修了
現在　東北大学教授

論理学初歩

1973年5月10日　第1刷発行
2000年3月10日　第26刷(新装版)発行
定価はカバーに表示しています

訳者　竹尾治一郎（たけおじいちろう）
　　　浅野楢英（あさのならひで）

発行者　高島国男

世界思想社
京都市左京区岩倉南桑原町56　〒606-0031
電話　075(721)6506(代)
振替　01000-6-2908

（共同印刷工業・藤沢製本）

ISBN4-7907-0417-3